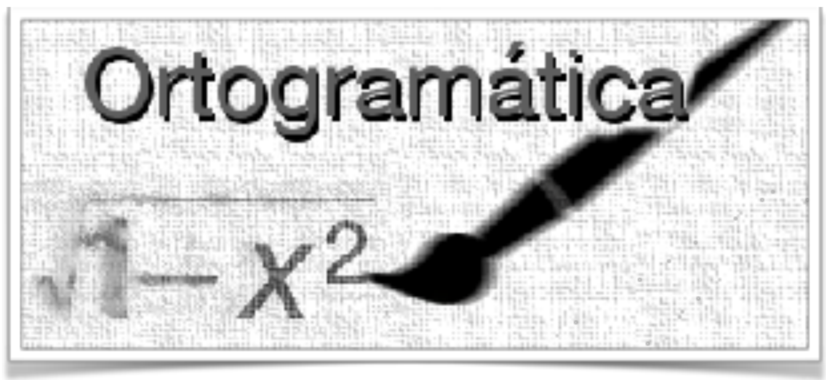
Ortogramática

“Escribir bien para aprender mejor”

Mayo de 2019



Autores:

Judith Eugenia Barreiro Díaz
Norma Angélica González Sandoval
Rogelio González Zepeda
Sergio López Luna
Herlinda Ostria Partida

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-INFOCAB-100319
“El correcto uso del lenguaje en la enseñanza de la matemática para Iniciación Universitaria”

Índice

Introducción

Para los estudiantes de Iniciación Universitaria de la Escuela Nacional Preparatoria, trabajar con lenguajes que permitan la codificación de información no siempre resulta sencillo. La forma en que se representa una adición con números racionales, elevar una expresión algebraica a alguna potencia o la suma de dos números negativos, implica que los alumnos deben realizar una traducción del lenguaje común al lenguaje matemático que, por su puesto deben tener el mismo significado.

Existen reglas generales para escribir los operadores en matemáticas y que todo estudiante debe seguir. Es por ello que se propone este manual de la **Ortogramática** (ortografía + matemáticas) para ayudar al estudiante a crear conciencia de que, al escribir correctamente las operaciones se resolverán los ejercicios requeridos y no otros.

Un error muy común que cometen los estudiantes, al momento de la resolución de ejercicios, radica en que no escriben correctamente las expresiones que deben resolver. Ya sea porque en una fracción, la línea que divide al numerador y el denominador no está completa; el radicando no está completamente cubierto por el radical, los paréntesis no encierran a los términos a operar; entre otros. Al mejorar la escritura en lenguaje matemático los errores disminuirán porque se resolverán los problemas deseados y no otros.

A lo largo de nuestra experiencia hemos notado que los estudiantes no han hecho una reflexión consciente de las reglas de la "ortografía" de las expresiones matemáticas. El 60% de los alumnos cometen errores de escritura cuando, dentro de una clase, se dictan las expresiones o cuando, al momento de resolver ejercicios *distorsionan* las expresiones por no seguir estas reglas "ortogramaticales". Estos errores van desde raíces incompletas, potencias de binomios sin uso correcto de paréntesis, exponenciales con errores en su argumento entre otros. Al escribir equivocadamente las operaciones a realizar, los resultados a los que se llega no son los que resuelven el problema o ejercicio.

El objetivo de este manual es impulsar el uso correcto de las expresiones aritméticas y algebraicas para que, al momento de realizar las operaciones, se realicen sin errores, además de realizar un repaso de los algoritmos necesarios para realizar las operaciones.

Se proponen también algunos ejercicios de temas pertenecientes al programa oficial de la asignatura de Matemáticas II de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM. Los ejercicios presentados tienen la siguiente estructura: Una breve explicación del tipo de operaciones que se realizarán; ejemplos resueltos y ejercicios propuestos. Los resultados de cada uno de ellos están en el Anexo 1.

En los ejercicios de sumar números racionales y fracciones algebraicas, así como en las ecuaciones con denominador no se utiliza el método de hallar el máximo común divisor porque el objetivo es desarrollar la habilidad operativa, se solicita que al final se simplifique el resultado.

Deseamos que este material apoye el mejoramiento del aprendizaje de nuestros estudiantes. Existen ligas a una página web para apoyar los contenidos de este manual. ¡Visítalo!

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Programa UNAM–DGAPA–INFOCAB 100319, "El correcto uso del lenguaje en la enseñanza de la matemática para Iniciación Universitaria".

Los autores.

Exámenes diagnóstico

Primer periodo.

Nombre: ____

I. Contesta las siguientes preguntas:
a. ¿En qué consiste la propiedad distributiva? Da un ejemplo.
b. En un monomio, ¿cuál es el coeficiente? Da un ejemplo
c. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$?
d. ¿En qué consiste la propiedad conmutativa? Da un ejemplo.

II. Escribe en lenguaje común las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ ____

b. $\dfrac{x+4}{3}$ ____

c. $\sqrt{x^2+3}$ ____

III. Escribe la expresión algebraica equivalente al texto indicado:
a. "La suma del cuadrado de *a* y el cubo de *b*" ____________________________

b. "El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera" ____________________

c. "El cociente de la suma de *x* y *y* entre un medio" ________________________

IV. Resuelve las siguientes operaciones, no omitas ningún paso.

$\frac{2}{7}+\frac{5}{3}=$ $\quad$ $7-\frac{6}{7}=$ $\quad$ $-\frac{3}{2}+4-\frac{6}{5}=$

$\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}=$ $\quad$ $4\cdot\frac{6}{7}=$ $\quad$ $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot 4=$

$\dfrac{3}{\frac{4}{5}}=$ $\quad$ $\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{3}}=$ $\quad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^3=$

V. Realiza las siguientes operaciones:
a. $1-3\cdot 4+2\div 2=$

b. $2\cdot 3-3\cdot 4+10\div 5=$

c. $10\div 2+8\div 2-2=$

Segundo periodo.

Nombre: ____

I. Realiza las siguientes operaciones y simplifica al máximo.

a. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} =$

b. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-x}{\dfrac{2x^2}{5}} =$

c. $1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-1} =$

II. Desarrolla los siguientes productos notables.

a. $(x-4)(x+3) =$

b. $(a+5)^2 =$

c. $(b-5)(b+3) =$

d. $(1-a)^2 =$

e. $2x^2(4+3x^3) =$

III. Factoriza las siguientes expresiones

a. $x^2-9x+18 =$

b. $a^2-2a+1 =$

c. $x^2+16x+64 =$

d. $2x^2+16x =$

Tercer periodo.

Nombre: ____

I. Resuelve los siguientes productos notables

a. $(a-4)(a+4)=$

b. $(x+5)(x-5)=$

c. $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)=$

II. Resuelve las siguientes ecuaciones

a. $x+3=5$ b. $4x-6=7$ c. $3-8x=3x-7$

III. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método que desees.

a. $x^2+9x+18=0$ b. $2x^2-4x+1=0$ c. $x^2-4x+4=0$

IV. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por cualquier método.

a. $\begin{aligned} 5x+3y&=7 \\ x-4y&=6 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 2x+5y&=-9 \\ 3y-4y&=-2 \end{aligned}$

Guía de Ortogramática

La correcta escritura de expresiones aritméticas y algebraicas es muy importante para realizar las operaciones que deseamos y no otras. Es importante escribir adecuadamente estas expresiones, para ello te recomendamos hacer uso de las siguientes reglas gramaticales en matemáticas.

1. A cada uno de los elementos de una adición se les llama sumandos
   En $a+x+\pi$, los sumandos son: a, x y π

2. A cada uno de los elementos de una multiplicación se les llama factores
   En $2\pi r$, los factores son: 2, π y r

3. Se llama argumento a la expresión a la que se le aplicará una operación o función.
   Por ejemplo
   a) En $\sqrt{x}$ el argumento de la raíz cuadrada es x
   b) En $\operatorname{sen} t$ el argumento del seno es t

4. Cuando se lee una operación es necesario indicar primero el **operador**, es decir, la operación a realizar; después la palabra **DE** y por último, **el argumento** de la operación, es decir, lo que se va a operar.

operador + **“DE”** + **argumento**

Por ejemplo:

a) $a+b$ **operador:** suma; **argumento:** a y b. Se lee “la suma **DE** *a* y *b*”

b) $\sqrt{x}$ **operador:** raíz cuadrada; **argumento:** x. Se lee “la raíz cuadrada **DE** *x*”

c) a^3 **operador:** elevar al cubo; **argumento:** a. Se lee “el cubo **DE** *a*”

Si la expresión tiene más de una operación, se debe leer desde el último operador aplicado al primero.

d) $(x+y)^3$ se lee “el cubo **DE** la suma **DE** *x* y *y*”

e) $\sqrt[5]{(3+x)^2}$ se lee “la raíz quinta **DEL** cuadrado **DE** la suma **DE** 3 y *x*”

f) $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt[3]{a-b}$ se lee “el producto **DE** la raíz cuadrada **DE** la suma **DE** *a* y *b* por la raíz cúbica **DE** la resta **DE** *a* menos *b*”

g) $\cos x$ se lee “coseno **DE** *x*”

h) $\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{\pi^3}\right)\right)$ se lee “tangente **DEL** seno **DE** la raíz cuadrada **DEL** cubo **DE** *pi*”

5. Una expresión racional o fracción se compone de un numerador y un denominador, dispuestos de la siguiente manera:

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

6. La línea de fracción debe ser horizontal la cual debe abarcar completamente al numerador y al denominador:

correcto: $\dfrac{a+b^2}{\sqrt{3a+1}-5}$ incorrectos: $\dfrac{a+b^2}{\sqrt{3a+1}}-5$ $\dfrac{\text{a}+\text{b}^2}{\sqrt{3a+1}-5}$

7. El símbolo de raíz cuadrada $\sqrt{\ }$ o raíz n-*ésima* $\sqrt[n]{\ }$ debe cubrir todo su argumento o radicando

correcto: $\sqrt{b^2-4ac}$ incorrecto: $\sqrt{b^2-4}ac$

correcto: $\sqrt[5]{\dfrac{1}{1+x^2}}$ incorrecto: $\dfrac{\sqrt[5]{1}}{1+x^2}$

9. El signo de igual debe estar a la mitad de la altura de las variables o números.

correcto: $3x^2=2y+1$ incorrecto: $3x^2{}_{=}\,2y+1$

incorrecto: $3x^2\,{}^{=}\,2y+1$

correcto: $\dfrac{\frac{5}{x+2}}{3}=$ incorrecto: $\dfrac{\frac{5}{x+2}}{3}{}_{=}$ o $\dfrac{\frac{5}{x+2}}{3}{}^{=}$

10. La línea de fracción debe estar a la mitad del signo de igualdad

correcto: $\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$ incorrecto: $\dfrac{10}{12}{}_{=}\dfrac{5}{6}$

11. Evitar usar la diagonal / para indicar una división, es mejor expresarla como una expresión racional, o en su defecto por el símbolo ÷

correcto: $\dfrac{3}{x^2}$ o $3\div x^2$ incorrecto: $3/x^2$

12. Para el designar el producto se utilizan los símbolos $\cdot$, $\times$, encerrar los factores entre paréntesis o simplemente escribir los factores uno al lado del otro.

Ejemplo $2 \cdot a \cdot b = 2 \times a \times b = (2)(a)(b) = 2ab$

13. En la necesidad de escribir una expresión con divisiones en una sola línea con el numerador y/o el denominador conteniendo más de un término es necesario utilizar paréntesis.

Ejemplo 1. $\dfrac{3-x^4}{a^3+4} = (3-x^4) \div (a^3+4)$

Ejemplo 2. $\dfrac{1}{x^2+x-3} = 1 \div (x^2+x-3)$

14. Escribir los paréntesis tan altos como se requiera para abarcar la operación entre ellos

correcto: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ incorrecto: $(1+\dfrac{1}{x})^x$

15. El orden para escribir un término es: coeficientes numéricos, constantes, variables.

correcto: $3\pi r^2$ incorrecto: $\pi r^2 3$

16. Un **monomio** es una expresión que consta de un **término** y se compone de: un coeficiente, a veces de constantes y una o varias variables elevadas a un exponente.

$$3\sqrt{\pi}x^{2k}$$

Propiedades utilizadas en las operaciones

Existen algunas propiedades que permiten justificar las operaciones algebraicas.

Propiedad asociativa de la adición: $(a+b)+c=a+(b+c)$

Propiedad asociativa de la multiplicación: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Propiedad conmutativa de la adición: $a+b=b+a$

Propiedad conmutativa de la multiplicación: $a\cdot b=b\cdot a$

Propiedad distributiva de la multiplicación ante la adición: $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Existencia del neutro aditivo, el cero: $a+0=a$

Existencia del neutro multiplicativo, el uno: $1\cdot a=a$

Existencia del inverso aditivo en el conjunto de los enteros: $a+(-a)=0$

Existencia del inverso multiplicativo en el conjunto de los racionales: $a\cdot\frac{1}{a}=1$

Ejemplo:

Simplificar la siguiente operación utilizando las diferentes propiedades.

$5+[3+(-2)]3+5(-1)+2(3)=$	Propiedad distributiva de la multiplicación ante la adición
$=5+9+(-6)+5(-1)+2(3)=$	Operador binario de la multiplicación
$=5+9+(-6)+(-5)+6=$	Propiedad conmutativa de la suma
$=5+9+(-5)+(-6)+6=$	Propiedad conmutativa de la suma
$=5+(-5)+9+(-6)+6=$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo de la adición
$=0+9+0=$	Propiedad asociativa de la adición
$=[0+9]+0=$	Propiedad asociativa de la adición
$=9+0=$	Propiedad de la existencia del elemento neutro de la adición
$=9$	Propiedad de la existencia del elemento neutro de la adición

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Simplificar la siguiente operación utilizando las diferentes propiedades.

a) $4+8(1)+5(6+2)+0=$

b) $9(5+4)+6-2(5-2)-6=$

c) $8+\left[9-2\left\{6-(5-4)\right\}\right]-\left\{11-\left[6-(2-3)\right]\right\}=$

d) $8-\left\{4-(-2)\left[3(8-11)+(9-11)\right]\right\}=$

e) $2-\left[-3(2-5)+2(5-\left[4+6\right])\right]=$

Operaciones binarias con racionales.

Adiciones

$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ay+bx}{by}$$

Realiza las siguientes operaciones y simplifica los resultados. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

Ejemplo:

a) $\frac{3}{4}+7=\frac{3+4(7)}{4}=\frac{3+28}{4}=\frac{31}{4}$

b) $\frac{5}{2}+\frac{3}{7}=\frac{5(7)+2(3)}{2(7)}=\frac{35+6}{14}=\frac{41}{14}$

Observación: <u>En este manual usaremos este método, sin embargo es posible realizar este tipo de sumas con otros algoritmos, los cuales no se presentarán aquí.</u>

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Racionales más enteros

a) $\frac{2}{3}+5=$

b) $\frac{2}{7}-8=$

c) $\frac{1}{7}+11=$

d) $-\frac{5}{2}-6=$

e) $-\frac{3}{8}+5=$

f) $\frac{7}{2}-10=$

g) $\frac{8}{3}-12=$

h) $\frac{9}{4}-10=$

II. Racionales más racionales, no enteros.

a) $\frac{2}{4}+\frac{3}{7}=$

b) $\frac{2}{5}+\frac{5}{3}=$

c) $\frac{4}{7}+\frac{1}{5}=$

d) $\frac{7}{3}+\frac{5}{14}=$

e) $\frac{6}{5}-\frac{10}{3}=$

f) $-\frac{7}{2}+\frac{5}{4}=$

III. Realiza las siguientes sumas de racionales más racionales, recuerda que debes operar de forma binaria:

a) $\frac{3}{8}-\frac{2}{5}-\frac{4}{7}+\frac{5}{6}=$

b) $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{9}{2}=$

c) $\frac{7}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4}+\frac{6}{5}=$

d) $-\frac{9}{2}-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{7}{2}=$

e) $-\frac{6}{5}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$

f) $-\frac{6}{5}-\frac{7}{2}-\frac{3}{10}+\frac{3}{4}=$

g) $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}-\frac{1}{5}+\frac{8}{3}=$

h) $-\frac{9}{2}+\frac{7}{2}-\frac{8}{5}+\frac{1}{7}=$

Multiplicaciones

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a\cdot x}{b\cdot y}$$

"numerador por numerador
entre
denominador por denominador"

Ejemplos: $\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2\cdot 5}{3}=\frac{10}{3}$ $\quad\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 7}=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 7}=\frac{\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 7}=\frac{3}{14}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Racionales (no enteros) por enteros

a) $\frac{4}{5}\cdot 8=$ b) $\frac{2}{7}\cdot 8=$

c) $\frac{1}{7}\cdot 1=$ d) $\frac{5}{2}\cdot 6=$

e) $\frac{3}{8}\cdot 5=$ f) $\frac{7}{2}\cdot 10=$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Racionales por racionales, no enteros.

a) $\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{3}=$ b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}=$

c) $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5}=$ d) $\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{14}=$

e) $\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{12}=$ f) $\frac{7}{20}\cdot\frac{5}{14}=$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

III. Simplifica antes de realizar los productos:

a) $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{6}=$

b) $\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{5}\cdot\frac{9}{2}=$

c) $\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\frac{6}{5}=$

d) $\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}=$

e) $\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=$

f) $\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{9}{24}=$

g) $\frac{4}{18}\cdot\frac{5}{16}\cdot\frac{21}{5}\cdot\frac{8}{7}=$

h) $\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{10}{7}=$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

IV. Simplifica antes de realizar los productos:

Ejemplo: $\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{\cancel{7}}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\overset{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{6}}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}=\frac{1\cdot3\cdot3}{4}=\frac{9}{4}$

a) $\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{10}\cdot6=$

b) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{9}{2}=$

c) $\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{16}=$

d) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{18}{7}\cdot\frac{14}{32}=$

e) $\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{21}{4}\cdot\frac{9}{5}\cdot5=$

f) $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{9}\cdot\frac{30}{12}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{40}=$

g) $\frac{12}{7}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{50}{14}\cdot\frac{24}{5}\cdot\frac{21}{10}\cdot\frac{7}{99}=$

h) $\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{25}{18}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{21}{5}\cdot\frac{9}{22}=$

i) $\frac{9}{10}\cdot\frac{14}{50}\cdot\frac{30}{14}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{45}{20}=$

Divisiones

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{ay}{bx}$$

"extremos por extremos
entre
medios por medios"

Ejemplos: $\dfrac{2}{\frac{1}{6}} = \dfrac{2 \cdot 6}{1 \cdot 1} = \dfrac{12}{1} = 12$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \dfrac{8}{3}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Realiza las siguientes operaciones, recuerda que el signo de igualdad está a la altura de la línea principal de las fracciones.

a) $\dfrac{3}{\frac{1}{4}} =$ $\qquad$ b) $\dfrac{7}{\frac{3}{8}} =$ $\qquad$ c) $\dfrac{5}{\frac{4}{7}} =$

d) $\dfrac{-\frac{4}{5}}{8} =$ $\qquad$ e) $\dfrac{\frac{7}{3}}{8} =$ $\qquad$ f) $\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{6}{7}} =$

g) $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{5}} =$ $\qquad$ h) $-\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{4}} =$ $\qquad$ i) $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{8}{5}} =$

j) $\dfrac{-\dfrac{20}{3}}{-\dfrac{18}{5}}=$

k) $\dfrac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}}=$

l) $\dfrac{\dfrac{1}{3}+2}{1-\dfrac{7}{4}}=$

m) $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{2}{7}-1}=$

n) $\dfrac{\dfrac{6}{5}-\dfrac{9}{2}}{\dfrac{2}{5}-\dfrac{7}{3}}=$

ñ) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}=$

o) $\dfrac{\dfrac{2}{a}}{\dfrac{a}{2}}=$

p) $\dfrac{\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\pi}{2}}=$

q) $\dfrac{-\dfrac{2a}{3}-\dfrac{3a}{2}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{4}}=$

Exponentes

Leyes o propiedades de los exponentes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{si} \ a \neq 0$$

$$a^0 = 1 \ \text{si} \ a \neq 0$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \quad \text{si} \ a \neq 0$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ejemplos de la aplicación de las propiedades de los exponentes para simplificar potencias:

a) $\sqrt[4]{81^3} = 81^{\frac{3}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{4\cdot\frac{3}{4}} = 3^3 = \boxed{27}$

b) $\left(8^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{18}} = 8^{\frac{12}{15}\cdot\frac{15}{18}} = 8^{\frac{12}{18}} = \left(2^3\right)^{\frac{2\cdot 6}{3\cdot 6}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

c) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{x}}}} = \left(\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\frac{1}{2}} = \boxed{x^{\frac{1}{60}}} = \boxed{\sqrt[60]{x}}$

d) $\left(\sqrt[2]{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \boxed{x^{\frac{1}{6}}} = \boxed{\sqrt[6]{x}}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Aplica las propiedades de los exponentes para realizar las siguientes operaciones

a) $3^2 \cdot 3^5 =$

b) $a^{-2} \cdot a^6 =$

c) $x^5 \cdot x^{10} =$

d) $t^{-4} \cdot t^{-3} \cdot t^5 =$

e) $p^5 \cdot p^{-3} \cdot p^{-7} =$

f) $5^{-3} \cdot 5^2 \cdot 5^{-9} =$

g) $\frac{x^3}{x^2} =$

h) $\frac{3^5}{3^9} =$

i) $\frac{a^{19}}{a^7} =$

j) $\frac{5^{-5}}{5^4} =$

k) $\frac{p^{-13}}{p^{-4}} =$

l) $\frac{4^{-4}}{4^{-10}} =$

m) $\dfrac{1}{h^{-2}} =$

n) $\dfrac{1}{a^{5}} =$

ñ) $\dfrac{1}{p^{-6}} =$

o) $\dfrac{1}{b^{4}} =$

p) $\dfrac{1}{n^{-9}} =$

q) $\dfrac{1}{5^{7}} =$

r) $a^{\frac{2}{3}} =$

s) $5^{\frac{3}{5}} =$

t) $p^{\frac{3}{4}} =$

u) $3^{\frac{6}{11}} =$

v) $7^{\frac{1}{8}} =$

w) $b^{\frac{7}{4}} =$

x) $w^{-\frac{6}{7}} =$

y) $9^{-\frac{2}{3}} =$

z) $6^{-\frac{8}{5}} =$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Expresa el resultado con una base, un solo exponente y que este sea positivo (recuerda como se escriben las potencias negativas y fraccionarias):

a) $4^{3}\cdot 4^{-2}\cdot 4^{9} =$

b) $\dfrac{c^{2}\cdot c^{5}\cdot c^{9}}{c^{8}\cdot c^{7}\cdot c^{3}} =$

c) $\left(x^{-3}\cdot x^{8}\cdot x^{-7}\right)^{3} =$

d) $\dfrac{a^{2}a^{-4}a^{6}}{a^{-5}a^{7}a^{-3}} =$

e) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}x^{-3}}{x^{\frac{1}{2}}} =$

f) $e^{\frac{4}{5}}\cdot e^{3}\cdot e^{-\frac{6}{7}} =$

g) $\left(\dfrac{5^{4}\cdot 5^{-\frac{4}{3}}\cdot 5^{-2}}{5^{-5}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{6}}\right)^{4} =$

h) $\left(\dfrac{t^{\frac{3}{4}}\cdot t^{-4}}{t^{-6}\cdot t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} =$

i) $\left(\dfrac{2^{-4}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{5}}{2\cdot 2^{7}\cdot 2^{-\frac{5}{3}}}\right)^{9} =$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

III. Realiza las siguientes operaciones, expresa el resultado con una sola raíz:

a) $\sqrt{x}\left(x^{2}\cdot\sqrt[3]{x^{4}}\right) =$

b) $\left(\sqrt[4]{a^{3}}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}\right)^{3} =$

c) $\sqrt[4]{c}\left(\dfrac{\sqrt{c^{5}}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt[5]{c^{3}}}\right) =$

d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{y}\cdot\sqrt{y^{5}}}{\sqrt[3]{y^{4}}}} =$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{h^{8}}\cdot\sqrt{h^{-5}}}{\sqrt{h^{3}}\cdot\sqrt{h^{-7}}}} =$

f) $\sqrt{\sqrt[7]{\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}}}} =$

Jerarquía de operaciones

Si existen varias operaciones en una misma expresión es necesario realizarlas en el siguiente orden:

1. Potencias y raíces
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Adiciones y sustracciones

Si no se respeta esta jerarquía los resultados obtenidos serán incorrectos.

Ejemplo 1:

$$
\begin{aligned}
&2-3\times4+10=\\
&=2-\underbrace{3\times4}_{12}+10=\\
&=\underbrace{2\;-\;12}_{-10}\;+10=\\
&=\;-10\qquad+10=0
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: $3^2+2^3\div4-10\times2=9+8\div4-10\times2=9+2-20=11-20=-9$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Haz uso de la jerarquía de operaciones para realizar las siguientes operaciones.

a) $4-3^2\times5-3\times10\div2-1=$

b) $-3+5-2\times5+1+10\div5=$

c) $24\div3+4\times3-4^2-32\div2=$

d) $-2^3+3^2\times2-2\times5+3=$

e) $4-2^2\div2+12\div6+3-2=$

f) $9\div3+2^2-3^2+4\div2-2+4=$

g) $\sqrt{4}-\sqrt{25}+3\times4+2^2-3\times2=$

h) $10\div2+3\times2-10\times2=$

i) $4^2-2^2\div4-5\times3=$

j) $\sqrt{9}-2^3+5-2\times7-7=$

Lenguaje algebraico

Observar el manual de ortogramática en la página 5.

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Escribir una expresión algebraica equivalente a las siguientes expresiones verbales:

a) La suma de dos números. ____________________________

b) La diferencia de dos números. ____________________________

c) El producto de dos números. ____________________________

d) El producto de tres números disminuido en cinco unidades. ______________________

e) El triple de un número. ____________________________

f) El producto de dos factores iguales ____________________________

g) El cociente de dos números ____________________________

h) El cociente de la suma de dos números entre otro número ______________________

i) El cociente de la diferencia de dos números entre otro número ___________________

j) La suma de dos números dividida entre su diferencia ______________________

k) El cuadrado de un número aumentado en trece unidades ______________________

l) El cubo de un número disminuido en seis unidades ___________________________

m) El triple del cuadrado de un número ___________________________

n) La raíz cuadrada del producto de dos números ___________________________

ñ) La suma de los cuadrados de dos números ___________________________

o) El cuadrado de la diferencia de dos números ___________________________

p) El cubo de la suma de dos números ___________________________

q) La mitad del cuadrado de un número ___________________________

r) El cuadrado de la mitad de un número ___________________________

s) La tercera parte del cubo de un número ___________________________

t) El perímetro p de un triángulo cuyos lados son a, b, c ___________________________

u) La suma de un número más tres es igual a 8 ___________________________

v) El triple de un número es igual al doble del otro ___________________________

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Escribe en la columna de la derecha la expresión algebraica que corresponda al enunciado escrito en lenguaje común.

a) Un número aumentado en 4 ______________________________

b) El doble de un número ______________________________

c) El triple de un número disminuido en 2 ______________________________

d) Un número impar ______________________________

e) El doble de un número aumentado en k ______________________________

f) La quinta parte de un número ______________________________

g) Un número par ______________________________

h) La cuarta parte de un número disminuido en 2 ______________________________

i) El cociente de dos números cualesquiera ______________________________

j) La sexta parte de la diferencia entre un número y 4 ______________________________

k) El doble de la suma de un número y 8 ______________________________

l) Un número impar disminuido en 10 ______________________________

m) Un número multiplicado por sí mismo ______________________________

n) El cuadrado del cociente de dos números consecutivos ______________________________

ñ) La semi suma de dos números ______________________________

o) El cuadrado de un número aumentado en k ______________________________

p) El cuadrado de la suma de un número aumentado en k ______________________________

q) Tres números consecutivos ______________________________

r) Tres números pares consecutivos ______________________________

s) Tres números impares consecutivos ______________________________

t) El recíproco de un número ______________________________

u) El cuadrado de la suma de tres números consecutivos ______________________________

v) El cubo de la semi diferencia de dos números ______________________________

w) El cubo del cociente de la suma de dos números entre su diferencia

____

x) El cociente del cuadrado de la suma de dos números entre el cubo de un número disminuido en 3. ______________________________

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

III. Escribe en la columna de la derecha la expresión algebraica indicada "con palabras".

a) $x - y$ ______________________________

b) $5x$ ______________________________

c) $2(a+b)$ ______________________________

d) $\frac{x+2}{2}$ ______________________________

e) $\frac{x}{3}$ ______________________________

f) $\frac{x+y}{3}$ ______________________________

g) $x^2 + y^2$ ______________________________

h) $(x+y)^2$ ______________________________

i) $2(a+b)^2$ ______________________________

j) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ______________________________

k) $\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$ ______________________________

l) $\sqrt{x^2+3}$ ______________________________

De la aritmética al álgebra

Los mismos algoritmos que se utilizan para operar

Ejemplo: $p+\frac{q}{4}=\frac{4p+q}{4}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Realiza las siguientes sumas de un entero y un racional (no entero), de ser posible escribe el resultado directamente (sin escribir el procedimiento) ver el ejemplo.

a) $a+\frac{b}{3}=$ b) $a+\frac{2}{3}=$ c) $2-\frac{b}{5}=$ d) $a-\frac{1}{b}=$

e) $x+\frac{9}{2}=$ f) $y-\frac{3}{7}=$ g) $a+\frac{x}{y}=$ h) $h-\frac{k}{n}=$

Ahora, suma dos números racionales no enteros.

Ejemplo:

$3a+\frac{7}{4b}=\frac{3a\cdot 4b+7}{4b}=\frac{12ab+7}{4b}$ $5a-\frac{50a}{9}=\frac{45a-50a}{9}=\frac{-5a}{9}=-\frac{5a}{9}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**
II. Realiza las siguientes operaciones.

a) $3x+\frac{4}{3y}=$ b) $4a-\frac{5a}{3}=$ c) $2x+\frac{2y}{4}=$

d) $2p-\frac{6a}{5}=$ e) $5x+\frac{7a}{9b}=$ f) $2p-\frac{9p}{10}=$

g) $8x+\frac{10x}{9}=$ h) $x-\frac{6}{5}=$ i) $5+\frac{3a}{10x}=$

En los siguientes ejercicios hay que usar propiedades de los exponentes. Ver el ejemplo.

Ejemplo:

$$9x+\frac{11}{5x}=\frac{9x\cdot 5x+11}{5x}=\frac{9\cdot 5\cdot x\cdot x+11}{5x}=\frac{45x^2+11}{5x}$$

$$7x^6-\frac{8y}{9x^2}=\frac{7x^6\cdot 9x^2-8y}{9x^2}=\frac{7\cdot 9\cdot x^6\cdot x^2-8y}{9x^2}=\frac{7\cdot 9\cdot x^{6+2}-8y}{9x^2}=\frac{63x^8-8y}{9x^2}$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

III. Realiza las siguientes operaciones.

a) $9a^2+\frac{1}{2a}=$

b) $-3b+\frac{2a}{9b}=$

c) $8x^5-\frac{7}{8x^6}=$

d) $5a^2+\frac{7x}{9a^7}=$

e) $11b^7+\frac{3x}{8b^{10}}=$

f) $6k^5-\frac{x}{10k^{20}}=$

g) $13x^5-\frac{9a^4}{10x^{16}}=$

h) $7a^5+\frac{2x^6}{9a^8}=$

Ejemplo: $\frac{3}{a}+\frac{b}{4}=\frac{3\cdot 4+a\cdot b}{a\cdot 4}=\frac{12+ab}{4a}$ $\qquad \frac{x}{2}-\frac{4}{y}=\frac{x\cdot y-2\cdot 4}{2\cdot y}=\frac{xy-8}{2y}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

IV. Realiza las siguientes sumas de dos números racionales (no enteros).

a) $\frac{5}{2}-\frac{x}{y}=$

b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=$

c) $\frac{c}{d}+\frac{4}{a}=$

d) $\frac{a}{4}+\frac{3}{y}=$

e) $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=$

f) $\frac{x}{6}-\frac{y}{4}=$

g) $\frac{7}{3}-\frac{c}{d}=$

h) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=$

Ahora suma dos números racionales un poco más “complicados” no enteros, ver el ejemplo.

Ejemplo: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

$$\frac{4a}{b}+\frac{5}{h}=\frac{4a\cdot h+5\cdot b}{b\cdot h}=\frac{4ah+5b}{bh} \qquad \frac{6x}{2}-\frac{7x}{4a}=\frac{6x\cdot 4a-7x\cdot 2}{2\cdot 4a}=\frac{24xa-14x}{8a}$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

V. Realiza los siguientes ejercicios.

a) $\frac{3p}{2q}+\frac{8a}{6b}=$ b) $\frac{10x}{3a}+\frac{8}{5}=$ c) $\frac{10x}{5a}-\frac{9h}{7}=$

d) $\frac{9}{4x}-\frac{2a}{7y}=$ e) $\frac{8a}{x}+\frac{4y}{3k}=$ f) $\frac{3x}{2a}-\frac{8b}{5y}=$

g) $\frac{3a}{2}-\frac{2x}{4y}=$ h) $\frac{3x}{5}+\frac{y}{4x}=$ i) $\frac{1}{4x}+\frac{2x}{3a}=$

Ejemplo:

$$\frac{9}{2x}+\frac{11}{5x}=\frac{9\cdot 5+11\cdot 2}{2\cdot 5x}=\frac{45+22}{10x}=\frac{67}{10x} \qquad \frac{5a}{6y^5}-\frac{7y}{x^2}=\frac{5a\cdot x^2-6y^5\cdot 7y}{6y^5\cdot x^2}=\frac{5ax^2-42y^6}{6y^5x^2}$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

VI. Realiza las siguientes operaciones

a) $\frac{2h^3}{3k^2}-\frac{3k^3}{4h}=$

b) $\frac{4x}{5y}+\frac{y^3}{6x^4}=$

c) $\frac{3x}{2a^3}-\frac{7a^3}{3x^2}=$

d) $\frac{7y^2}{6x^2}+\frac{2y^2}{5a^5}=$

e) $\dfrac{10x^3}{3y^5}+\dfrac{5y^6}{8x^7}=$

f) $\dfrac{5y^5}{8x^8}-\dfrac{9x^6}{7y^8}=$

g) $\dfrac{12x^5}{13a^6}-\dfrac{8a^7}{5x^4}=$

h) $\dfrac{9x^5}{2b^5}+\dfrac{9b^7}{2x^5}=$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**
VII. Por último, realizar las siguientes sumas.

a) $\dfrac{9ax^5}{2d^2b^5}+\dfrac{d^3b^7}{2a^5x^7}=$

b) $\dfrac{2x^2y^5z^2}{7a^2b^5c^7}+\dfrac{4b^6}{9x^{19}}=$

c) $\dfrac{2a^6h^2x^5}{3b^4c^5d^9}+\dfrac{9b^5c^7d^2}{2a^7h^3x^7}=$

d) $\dfrac{2x^6y^{12}}{9a^{12}b^{50}}+\dfrac{3a^{10}b^{17}}{8x^8y^{12}}=$

Productos notables y factorización

Términos semejantes

Dos términos son semejantes cuando dos monomios solo se diferencian en su coeficiente. Por ejemplo $5x^3y$ y $\frac{4}{5}x^3y$ son términos semejantes ya que las variables son las mismas elevadas a los mismos exponentes. Para sumar dos términos semejante solo se suman sus coeficientes.

Ejemplo: $4x^4y^2+\frac{1}{2}x^4y^2-x^4y^2=\left(4+\frac{1}{2}-1\right)x^4y^2=\frac{7}{2}x^4y^2$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Suma los términos semejantes de las siguientes expresiones.

a) $5a+8b-2a-9b=$

b) $2x^2+3x-4x+5x^2=$

c) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}x+x-\frac{5}{2}x=$

d) $2x^2+5-4a^3-2a^2-4x^5-3x^2+3=$

e) $\frac{2}{3}\pi^4-\frac{1}{2}e^2+5e^{\frac{1}{2}}-6\pi^2+\frac{5}{3}\pi^{\frac{1}{4}}=$

f) $\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^3-5y^{-4}-\frac{2}{3}x^5=$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Utiliza la propiedad distributiva y propiedades de los exponentes para realizar las siguientes operaciones.

a) $3\left(4x^4-2x^3+5x^2+7x-2\right)=$

b) $x\left(2x^3-4x^2+5x-2\right)=$

c) $5\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{5}x+\frac{4}{3}\right)=$

d) $y\left(\frac{4}{3}y^5-\frac{2}{5}y^3+\frac{2}{5}y^{\frac{1}{2}}+7y^{\frac{3}{2}}-5\right)=$

e) $2b\left(3b^5+4b^4-3b^2+4b-2\right)=$

f) $4a^2\left(\frac{3}{2}a^4-\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{5}a^{\frac{5}{3}}-5a\right)=$

Ejercicios: Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.

III. Indica cuál es el coeficiente, la base y el exponente de los siguientes términos. Además encierra en un círculo la potencia.

a) $4x^6$ Coeficiente: base: exponente:

b) $-8b^6$ Coeficiente: base: exponente:

c) $-27a^{\frac{2}{5}}$ Coeficiente: base: exponente:

d) $7x^{17}$ Coeficiente: base: exponente:

e) $6y^{-3}$ Coeficiente: base: exponente:

Ejercicios: Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.

IV. Subraya con diferentes colores los términos semejantes de las siguientes expresiones y súmalos.

a) $-a^2b+8ab^2-7a^2b+4a^2b-10ab^2=$

b) $-x^5y^2+8x^2y^2-7x^5y^2+10x^5y^2-7x^2y^2=$

c) $2y^2a^{10}-4y^2+10a^{10}-5y^2a^2+7y^2+9y^2a^{10}-a^{10}+8y^2=$

d) $8xy^2+\frac{3}{5}xy^2+3x^4-5xy^2-3=$

e) $-5a^4b^{-4}+10ab^4+6ab^{-4}-10a^4-b-11a^4+10ab^4=$

Factor común

V. Encuentra el factor común de cada uno de los siguientes términos y factorízalo.

Ejemplo $8a^2b^2 - 12ab^3$ Factor común: $4ab^2$

Factorización: $8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2\left(\dfrac{8a^2b^2}{4ab^2} - \dfrac{12ab^3}{4ab^2}\right) = 4ab^2\left(2a - 3b\right)$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

a) $2a + 4$ Factor común: Factorización:

b) $a + a^2$ Factor común: Factorización:

c) $x^2 + x^5$ Factor común: Factorización:

d) $3y + 4y^2 + 5y^3$ Factor común: Factorización:

e) $2a^3 + 6a^2 - 4a$ Factor común: Factorización:

f) $4c^3 - 12c^2 + 8c$ Factor común: Factorización:

g) $20x^3y^2 + 25x^2y^3$ Factor común: Factorización:

h) $14x^2y^2z - 21xy^3z^2$ Factor común: Factorización:

i) $10a^4b^5x^3 + 35a^2b^7x^2$ Factor común: Factorización:

j) $15xy^2 - 25x^3y + 30x^3y^2z$ Factor común: Factorización:

Producto de dos binomios con un término en común

Los términos no comunes son positivos, en este caso los tres términos son positivos.

Ejemplos:

$$(x+3)(x+2)=x^2+(+3+2)x+(+3\cdot+2)=x^2+5x+6$$

$$(a+7)(a+9)=a^2+(+7+9)a+(+7\cdot+9)=a^2+16a+63$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Obtén el producto de los siguientes binomios.

a) $(y+8)(y+11)=$

b) $(n+5)(n+10)=$

c) $(h+13)(h+7)=$

d) $(b+14)(b+5)=$

e) $(x+\frac{2}{3})(x+8)=$

f) $(y+\frac{2}{7})(y+5)=$

g) $(h+\frac{9}{2})(h+9)=$

h) $(n+\frac{3}{5})(n+10)=$

i) $(a+\frac{6}{7})(a+4)=$

j) $(p+\frac{1}{7})(p+11)=$

Los términos no comunes son negativos, aquí el coeficiente del término lineal es negativo.

Ejemplo: $(x-7)(x-8)=x^2+(-7+(-8))x+(-7\cdot-8)=x^2-15x+56$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Obtén el producto de los siguientes binomios.

a) $(x-2)(x-10)=$

b) $(y-6)(y-9)=$

c) $(a-4)(a-7)=$

d) $(r-10)(r-2)=$

e) $(t-12)(t-20)=$

f) $(n-11)(n-5)=$

g) $(y-\frac{2}{5})(y-\frac{1}{2})=$

h) $(x-\frac{5}{3})(x-\frac{7}{4})=$

i) $(t-\frac{1}{2})(t-\frac{1}{7})=$

j) $(x-\frac{5}{4})(x-\frac{2}{7})=$

k) $(y-\frac{9}{4})(y-\frac{6}{5})=$

l) $(k-\frac{4}{3})(k-\frac{6}{7})=$

Los dos términos no comunes con distinto signo, aquí el término independiente es negativo.

Ejemplo: $(r+2)(r-7)=r^2+(+2+(-7))r+(+2\cdot -7)=r^2-5r-14$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**
III. Obtén el producto de los siguientes binomios.

a) $(a-8)(a+1)=$

b) $(x-8)(x+9)=$

c) $(y-18)(y+4)=$

d) $(n+13)(n-10)=$

e) $(h+1)(h-20)=$

f) $(m-17)(m+2)=$

g) $(a+4)(a-22)=$

h) $(t-5)(t+11)=$

i) $(x-\frac{3}{2})(x+7)=$

j) $(b+6)(b-\frac{5}{3})=$

k) $(n-\frac{5}{4})(n+\frac{4}{5})=$

l) $(y-\frac{7}{9})(y+\frac{3}{2})=$

Factorización de un trinomio.

Para factorizar un trinomio del tipo x^2+ax+b es necesario hallar dos números p y q tales que se cumplan las siguientes condiciones: $p+q=a$ y $p\cdot q=b$

Ejemplo: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ pues $(-3)+(-4)=-7$ y $(-3)(-4)=+12$

$a^2+5a-14=(a+7)(a-2)$ pues $(+7)+(-2)=+5$ y $(+7)(-2)=-14$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Factoriza cada trinomio como el producto de dos binomios con un término en común.

a) $x^2+11x+18=$

b) $c^2-11c+30=$

c) $h^2+h-30=$

d) $y^2-9y+20=$

e) $k^2+12x+27=$

f) $y^2-2y-15=$

g) $u^2-11u+10=$

h) $w^2-14w+45=$

i) $p^2+9p+18=$

j) $k^2+8k-33=$

El cuadrado de un binomio.

Observa que los dos factores son iguales, es decir se obtiene **el cuadrado del binomio**. Al resultado se le llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Ejemplo: $(a+b)(a+b)=a^2+(b+b)a+(a\cdot b)=\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}=\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Obtén el producto de los siguientes binomios.

a) $(x+y)(x+y)=(x+y)^2=$

b) $(9+q)(9+q)=(9+q)^2=$

c) $(x^2+y)(x^2+y)=(x^2+y)^2=$

d) $(2h+5)(2h+5)=(2h+5)^2=$

e) $(4+3f)(4+3f)=$

f) $(5x^5+3y^2)(5x^5+3y^2)=$

g) $(3-x)(3-x)=$

h) $(z-5)(z-5)=$

i) $(2a-b)(2a-b)=$

j) $(2m-6n)(2m-6n)=$

k) $(a-b)(a-b)=$

l) $(9-q)(9-q)=$

El TCP se forma con **el cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término.**

Ejemplos: $(r-3)^2=r^2-2\cdot 3t+t^2=r^2-6r+9$

$$(-x^3+a^5)^2=(-x^3)^2+2(-x^3)(a^5)+(a^5)^2=x^6-2x^3a^5+a^{10}$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Obtén de manera inmediata el trinomio cuadrado perfecto (TCP) de cada uno de los siguientes ejercicios.

a) $(1+x)^2=$

b) $\left(b-3\right)^2=$

c) $\left(5+x\right)^2=$

d) $\left(-7y+8\right)^2=$

e) $\left(5+9t\right)^2=$

f) $\left(2x-5y\right)^2=$

g) $\left(-a^2-b^3\right)^2=$

h) $\left(x^6+h^3\right)^2=$

i) $\left(4-a\right)^2=$

j) $\left(b-2a\right)^2=$

k) $\left(7x+2y\right)^2=$

l) $\left(x^4-y^3\right)^2=$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

El reescribir un TCP como el cuadrado de un binomio se le conoce como factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Para reconocer un trinomio, por ejemplo $x^2+28x+196$, es un TCP recuerda que si al dividir el coeficiente del término lineal (28) y después, elevarlo al cuadrado da como resultado el término independiente (196); entonces $x^2+28x+196$ es un trinomio cuadrado perfecto. En este caso $\frac{28}{2}=14$ y $14^2=196$ y su factorización es $(x+14)^2$

Ejemplo: $a^2+2ab+b^2=(a)^2+2(a)(b)+(b)^2=(a+b)^2$

$9-6x+x^2=3^2-2(3)(x)+(x)^2=(3-x)^2$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

a) $y^2+2yh+h^2=$

b) $4+4b+b^2=$

c) $x^2+8x+16=$

d) $y^2+2yk+k^2=$

e) $h^2+20h+100=$

f) $\pi^2+6\pi+9=$

g) $n^2+2nm+m^2=$

h) $t^2+10t+25=$

i) $w^2+2wz+z^2=$

j) $x^2+14x+49=$

k) $u^2+16u+64=$

l) $1+2x+x^2=$

m) $r^2+6r+9=$

n) $j^2+22j+121=$

ñ) $i^2+2ik+k^2=$

o) $144+24a+a^2=$

p) $p^2+2pq+q^2=$

q) $h^2+14h+49=$

El producto de dos binomios conjugados

Recuerda que los binomios conjugados se presentan de la siguiente manera:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(-a+b)(-a-b)=(-a)^2-b^2=a^2-b^2$$
$$(-a-b)(a-b)=(-b)^2-a^2=b^2-a^2$$
$$(-a+b)(a+b)=(b)-a^2=b^2-a^2$$

Halla el producto de los siguientes binomios conjugados, observa que el resultado del producto de dos binomios conjugados es una **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo: $(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$

$$(-2+y)(-2-y)=(-2)^2-y^2=4-y^2$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Obtén el producto de los siguientes binomios conjugados.

a) $(r+t)(r-t)=$

b) $(-r-s)(-r+s)=$

c) $(-2a+c)(2a+c)=$

d) $(-3k-2h)(+3k-2h)=$

e) $(5x^2+y)(5x^2-y)=$

f) $(y^5-p^3)(y^5+p^3)=$

g) $(-6a^2+2b^5)(-6a^2-2b^5)=$

h) $(-3f^5+2g^6)(-3f^5-2g^6)=$

i) $(x^5+5^3)(-x^5+5^3)=$

j) $(2x^2y^3+5c^3d^7)(2x^2y^3-5c^3d^7)=$

k) $(7x^5+3y^3)(-7x^5+3y^3)=$

l) $(8a^5+3b^8)(8a^5-3b^8)=$

m) $(4ab-3cd)(4ab+3cd)=$

n) $(t^9+p^2)(t^9-p^2)=$

ñ) $(2a-7b)(2a+7b)=$

o) $(-r^4-4)(-r^4+4)=$

Factorización de una diferencia de cuadrados

Toda diferencia de dos términos se puede considerar como una "diferencia de cuadrados", la cual se factoriza como el producto de dos binomios conjugados. Los binomios se forman obteniendo la raíz cuadrada de uno de los términos.

Ejemplo: $x^2 - 81 = \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{81}\right)\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{81}\right) = (x+9)(x-9)$

$$a - 100 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{100}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{100}\right) = \left(\sqrt{a} + 10\right)\left(\sqrt{a} - 10\right)$$

$$-10 + f^2 = f^2 - 10 = \left(\sqrt{f^2} - \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{f^2} + \sqrt{10}\right) = \left(f + \sqrt{10}\right)\left(f - \sqrt{10}\right)$$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $a^2 - b^2 =$

b) $y^2 - 100 =$

c) $h^2 - 16 =$

d) $25 - k^2 =$

e) $-36 + u =$

f) $64 - p^2 =$

g) $w^2 - u =$

h) $-16 + b =$

i) $x - y =$

j) $x^2 - 8 =$

k) $a - b =$

l) $-16 + y^2 =$

m) $u - 4 =$

n) $-p + q^2 =$

ñ) $4 - y =$

o) $12 - q =$

Factorizaciones diversas

Ejemplos: $\underbrace{h-4}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{\left(\sqrt{h}-2\right)\left(\sqrt{h}+2\right)}_{\text{Producto de binomios conjugados}}$

$\underbrace{b^2-10b+25}_{\text{TCP: } \frac{-10}{2}=-5 \text{ y } (-5)^2=25} = \underbrace{\left(b-5\right)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Identifica cada una de las siguientes expresiones y escribe su factorización.

a) $a^2-9=$ b) $k^2-24k+144=$ c) $x^2-16=$

d) $y^2-121=$ e) $p^2+17p+70=$ f) $c^2-14c+49=$

g) $m^2-12m+36=$ h) $u^2+7u-8=$ i) $d^2-15d+14=$

j) $x^2-12x+27=$ k) $w^2-169=$ l) $t^2+5t-14=$

m) $y^2-22y+121=$ n) $p^2-144=$ ñ) $y^2+12y+35=$

o) $u^2-1=$ p) $y^2+17y+66=$ q) $h^2+26h+169=$

r) $a^2-11a+30=$ s) $b^2+16a+64=$ t) $g^2-4g+4=$

u) $x^2-10x+25=$ v) $y^2-81=$ w) $z^2-25=$

x) $x^2+18x+81=$ y) $x^2-8=$ z) $a^2-6a+9=$

Fracciones algebraicas

Aplicando las propiedades de los exponentes, factorizaciones y los algoritmos para operar fracciones racionales realiza las siguientes operaciones

Ejemplo 1.

$$\frac{x+1+\frac{x+1}{x-1}}{x-\frac{2}{x-1}}= \quad \text{Se suman las fracciones del numerador y del denominador.}$$

$$=\frac{\frac{(x+1)(x-1)+(x+1)}{x-1}}{\frac{x(x-1)-2}{x-1}}= \quad \text{Se realizan las operaciones de los numeradores}$$

$$=\frac{(x^2-1+x+1)(x-1)}{(x^2-x-2)(x-1)}= \quad \text{Se dividen las dos fracciones}$$

$$=\frac{x^2-1+x+1}{x^2-x-2}= \quad \text{Se divide } x-1 \text{ entre } x-1$$

$$=\frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)}= \quad \text{Se factorizan el numerador y denominador}$$

$$=\boxed{\frac{x}{x-2}} \quad \text{Se divide } x+1 \text{ entre } x+1$$

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=$

b) $\dfrac{4-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=$

c) $\dfrac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}}=$

d) $\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=$

e) $\dfrac{1-\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{b^2}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}}=$

f) $\dfrac{3-\dfrac{x+3y}{x+y}}{1+\dfrac{y}{x-y}}=$

g) $\dfrac{x+2-\dfrac{2}{x-1}}{x-1-\dfrac{2}{x+2}}=$

h) $\dfrac{1-\dfrac{2b}{a-b}}{2-\dfrac{a+b}{a-b}}=$

i) $\dfrac{1-\dfrac{y}{2x-3y}}{1+\dfrac{y}{x-3y}}=$

j) $\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x+3}{x+1}}=$

Ecuaciones de primer grado

Para resolver una ecuación de primer grado es necesario aplicar, en ambos miembros de la ecuación, las operaciones inversas a las presentadas en la ecuación, pero en "orden contrario".

Por ejemplo, la ecuación $\frac{4x-5}{3}=20$ notamos que las operaciones realizadas para formar la ecuación son

1. A la x se le multiplica por 4: $4x$
2. Al resultado se le restan 5: $4x-5$
3. El resultado se divide entre 3: $\frac{4x-5}{3}$

Ahora, para despejar a x, al segundo miembro se realizan las operaciones inversas en orden contrario

1. Al 20 se le multiplica por 3: $20\times 3=60$
2. Al resultado se le suma 5: $60+5=65$
3. El resultado se le divide ente 4: $\frac{65}{4}$

Así, el resultado es $x=\frac{65}{4}$

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Resuelve las siguientes ecuaciones. Indica cuales son las operaciones que se hicieron para "construir" la ecuación para que después, "utilices las operaciones inversas en orden contrario":

a) $3x+4=5$

b) $7x-5=3$

c) $-6x+8=13$

d) $6a-8=9$

e) $3a+8=-4$

f) $10-2b=21$

g) $-5x+9=10$

h) $6-8p=8$

i) $18+7h=22$

j) $\frac{5x-2}{5}=3$

k) $\frac{-2x+5}{7}=-4$

l) $\frac{6+5x}{7}=8$

Cuando la variable a despejar contiene en un mismo miembro varios términos con la variable, es necesario sumar términos semejantes.

Si existen términos con la variable en ambos lados de la ecuación habrá que aplicar el inverso aditivo de uno de ellos en ambos miembros para que estén todos los términos en un miembro, sumarios y resolver la ecuación.

Ejemplo

$-5x+4=-8+3x$

$-5x+4-3x=-8+3x-3x$ aplicamos el inverso aditivo de $+3x$ en ambos miembros

$-8x+4=-8+0$ se suman términos semejantes

$-8x+4=-8$ propiedad de la existencia del elemento neutro de la adición

$x=\dfrac{-8-4}{-8}$ se aplican las "operaciones inversas en orden contrario"

$x=\dfrac{-12}{-8}$ se sumaron los términos semejantes del numerador

$x=\dfrac{3}{2}$ se simplifica la fracción.

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Resuelve las ecuaciones que se indican:

a) $3x+5=2x-4$ b) $7b-8=5b+4$ c) $h+9=-3h-7$

d) $8a-7=3a-2$ e) $9x+10=11x-18$ f) $2-x=13x+12$

g) $-5x+4=-2x+18$ h) $5x+2=-5x+43$ i) $9x+4=-5-11x$

Si uno o los dos miembros de una ecuación de primer grado tienen denominador diferente de la unidad, se multiplica el numerador del primer miembro por el denominador del segundo, y el numerador del segundo miembro por el denominador del primero (a esto se le puede llamar "multiplicar cruzado"). Después se resuelve como el caso anterior.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación

$$\frac{-4x+5}{2}=\frac{8x-5}{3}$$

$3\left(-4x+5\right)=2\left(8x-5\right)$ "multiplicamos cruzado"

$-12x+15=16x-10$ se aplica la propiedad distributiva en amos miembros

$-12x+15-16x=16x-10-16x$ Se resuelve como el punto anterior.

$-28x+15=-10$

$$x=\frac{-10-15}{-28}$$

$$x=\frac{-25}{-28}$$

$$x=\frac{25}{28}$$

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

III. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x+5}{3}=\frac{8x-3}{5}$ b) $\frac{9x+1}{5}=\frac{2x+5}{3}$ c) $\frac{x+1}{4}=\frac{5-x}{2}$

d) $\frac{5-3x}{2}=\frac{6x+1}{7}$ e) $\frac{6a-7}{2}=5a+3$ f) $\frac{5-3x}{7}=9x+2$

g) $\frac{4-x}{3}=2x+9$ h) $\frac{6t-4}{3}=10x-1$ i) $11x+4=\frac{1+8x}{9}$

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

IV. Despeja la variable que se indica de las siguientes ecuaciones.

a) $4x-3=6$ $x=$ b) $-7a+21=10$ $a=$

c) $9y+11=8$ $y=$ d) $10-7k=-2$ k=

e) $\sqrt{3}-9t=8$ $t=$

f) $4+8y=\sqrt{11}$ $y=$

g) $\sqrt{5}\ c-8=10$ $c=$

h) $\sqrt{2}\ y-9=\sqrt{29}$ $y=$

i) $\sqrt{7}\ x+\sqrt{13}=\sqrt{37}$ $x=$

j) $\sqrt{123}-\sqrt{345}y=\sqrt{73}$ $y=$

k) $5\sqrt{7}\ x+2\sqrt{14}=5\sqrt{37}$ $x=$

l) $\pi\ x+w=1$ $x=$

m) $\sqrt{\pi}-\sqrt{k}z=9$ $z=$

n) $yx+ab=3p$ $x=$

ñ) $2\ x+\frac{2}{3}=6$ $x=$

o) $\frac{5}{2}-8y=7$ $y=$

p) $\frac{1}{2}-3t=\frac{5}{3}$ $t=$

q) $8-4h=\frac{5}{8}$ $h=$

r) $\frac{1}{2}\ x+\frac{5}{2}=\frac{5}{3}$ $x=$

s) $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}y=\frac{4}{3}$ $y=$

t) $\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}=6$ $x=$

u) $\frac{4}{3}-\frac{7}{2}k=\frac{7}{2}$ $k=$

v) $\frac{1}{\pi}\ w+\frac{1}{e}=4$ $w=$

w) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}x=\frac{1}{c}$ $x=$

Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones del tipo $x^2 = c$

Si la ecuación es del tipo $x^2 = c$ aplicamos la operación inversa a elevar al cuadrado, la raíz cuadrada en ambos miembros. Cuando se obtiene la raíz cuadrada habrá dos valores uno positivo y otro negativo. Por esta razón, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones x_1 y x_2.

Resuelve las siguientes ecuaciones

Ejemplo: $x^2 = 23$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{23}$ aplicamos la operación inversa a elevar al cuadrado.

$x = \pm\sqrt{23}$ si es exacta, se obtiene la raíz cuadrada, sino, se deja indicada

$x_1 = +\sqrt{23}$

$x_2 = -\sqrt{23}$

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Resuelve las siguientes ecuaciones, recuerda que hay dos soluciones

a) $x^2 = 12$

b) $x^2 = 72$

c) $x^2 = 75$

d) $x^2 = 27$

e) $x^2 = 80$

f) $x^2 = 50$

g) $x^2 = 46$

h) $x^2 = 121$

i) $x^2 = 49$

j) $x^2 = 3$

k) $x^2 = 35$

l) $x^2 = 36$

m) $x^2 = 100$

n) $x^2 = 2$

ñ) $x^2 = 101$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

En este tipo de ecuaciones las operaciones que se realizaron para "construir" la ecuación son: elevar al cuadrado, multiplicar por *a* y sumarle *c*. Para despejarla hay que aplicar las operaciones inversas en "orden contrario".

Ejemplo: $-2x^2 + 50 = 0$ las operaciones son:

1. A la *x* se elevó al cuadrado.
2. Al resultado se le multiplicó por –2
3. Al resultado se le sumó 50.

Para despejar se debe hacer

1. Al segundo miembro se le resta 50
2. Al resultado se le divide entre –2
3. Al resultado se le saca la raíz cuadrada (dos soluciones)

$x = \pm\sqrt{\frac{0-50}{-2}}$ Se simplifica el resultado

$$x = \pm\sqrt{\frac{-50}{-2}}$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

II. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 32 = 0$ b) $4x^2 - 112 = 0$ c) $3x^2 - 87 = 0$

d) $-4x^2 + 25 = 0$ e) $-8x^2 + 72 = 0$ f) $-16x^2 + 256 = 0$

g) $3x^2 - 99 = 0$ h) $-5x^2 + 10 = 0$ i) $4x^2 - 80 = 0$

j) $-2x^2 + 30 = 0$ k) $6x^2 - 72 = 0$ l) $2x^2 - 10 = 0$

m) $7x^2 - 80 = 0$ n) $-2x^2 + 28 = 0$ ñ) $-10x^2 + 80 = 0$

Ecuaciones del tipo $ax^2+bx+c=0$

Una ecuación completa, se puede resolver de varias formas. Aquí se resolverán por factorización (cuando se pueda), completando el trinomio cuadrado perfecto y por la fórmula general.

Factorizando.
Si el primer miembro se puede factorizar como el producto de dos binomios, entonces se resolverán dos ecuaciones de primer grado. Si no se puede factorizar, entonces se reescribe la ecuación con los términos que contengan la variable, en el primer miembro y los términos que no la contengan, en el segundo miembro.

Ejemplos:

Por factorización:

$x^2-2x-3=0$ se buscan dos números que sumados den –2 y multiplicados, –3. Ello son –3 y 1

$(x-3)(x+1)=0$ Al factorizar ,se simplifica la ecuación en dos ecuaciones de primer grado

$x-3=0$ $\quad$ $x+1=0$

$\boxed{x_1=3}$ $\quad$ $\boxed{x_2=-1}$

Por completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP).

$7x+12=10x^2$

$10x^2-7x=12$ Aplicando las operaciones inversas, se reescribe la ecuación con los términos cuadrático y lineal en el primer miembro.

$x^2-\frac{7}{10}x=\frac{12}{10}$ Se divide toda la ecuación entre el coeficiente del término cuadrático.

$x^2-\frac{7}{10}x+\left(\frac{7}{20}\right)^2=\frac{12}{10}+\left(\frac{7}{20}\right)^2$ Se forma el TCP sumando, en ambos miembros, el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal.

$\left(x-\frac{7}{20}\right)^2=\frac{6}{5}+\frac{49}{400}$ Se factoriza el TCP formado en el primer miembro, como el cuadrado de un binomio. Y se realizan las operaciones del segundo miembro.

$\left(x-\frac{7}{20}\right)^2=\frac{480+49}{400}$ Se realizan las operaciones del segundo miembro.

$\left(x-\frac{7}{20}\right)^2=\frac{529}{400}$ Se realizan las operaciones del segundo miembro.

$x-\frac{7}{20}=\pm\sqrt{\frac{529}{400}}$ Se aplica la operación inversa a elevar al cuadrado.

$x-\frac{7}{20}=\pm\frac{23}{20}$ Se simplifican las raíces, si se puede.

$x=\frac{7}{20}\pm\frac{23}{20}$ Se aplica la operación inversa a restar siete veinteavos.

$x_1=\frac{7}{20}+\frac{23}{20}$ $\quad x_2=\frac{7}{20}-\frac{23}{20}$ Se obtienen las dos soluciones una con la raíz positiva

$x_1=\frac{30}{20}$ $\quad x_2=-\frac{16}{20}$ y otra con la raíz negativa.

$\boxed{x_1=\frac{3}{2}}$ $\quad \boxed{x_2=-\frac{4}{5}}$ Estas son las soluciones.

✺ Por la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado.

$6x^2=12+x$ Ecuación a resolver.

$6x^2-x-12=0$ Aplicando las operaciones inversas se escribe la ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$.

$a=6 \quad b=-1 \quad c=-12$ Se identifican los valores de a, b, y c

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ de la fórmula general.

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(6)(-12)}}{2(6)}$$ Se sustituyen los valores en la fórmula general.

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{12}$$ Se realizan las operaciones indicadas.

$$x=\frac{1\pm\sqrt{289}}{12}$$ Si el radicando tiene raíz cuadrada exacta, se

$$x=\frac{1\pm 17}{12}$$ se obtiene, sino se deja indicada.

$$x_1=\frac{1+17}{12}=\frac{18}{12}=\boxed{\frac{3}{2}}$$ Una solución es con la raíz positiva.

$$x_2=\frac{1-17}{12}=\frac{-16}{12}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$ La otra solución es con la raíz negativa.

Ejercicios: **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**
III. Resuelve las siguientes ecuaciones por cualquiera de los métodos anteriores.

a) $2x^2 - x - 6 = 0$

b) $5x^2 - 6x = 0$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$

d) $x^2 + 4x = 5$

e) $x^2 + 3x = 10$

f) $2x^2 + 3x = 9$

g) $3x^2 + 10x - 8 = 0$

h) $4x^2 - 9 = 9x$

i) $4x^2 - 9x + 2 = 0$

j) $4x^2 + 3x = 0$

k) $5x^2 + 16x - 16 = 0$

l) $8x^2 - 15 = 2x$

m) $10x^2 + 21x + 9 = 0$

n) $14x^2 + 9x = 18$

ñ) $12x^2 = 15 + 11x$

o) $15x^2 = 8 + 2x$

p) $30x^2 - x - 20 = 0$

q) $4x^2 + 4x - 15 = 0$

r) $2x^2 - x - 3 = 0$

s) $x^2 - 8 = 4x$

t) $5x^2 + 12x = 9$

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas existen varios métodos:

- Adición y sustracción

  Se deben sumar o restar las ecuaciones para *eliminar* una variable y obtener una tercera ecuación de primer grado con una incógnita. Para que se elimine una variable es necesario que los coeficientes de la variable a eliminar sean iguales (en valor absoluto).

- Sustitución

  Se debe despejar una incógnita de una ecuación y, posteriormente, se sustituye el resultado en la otra ecuación para obtener una tercera ecuación de primer grado con una incógnita.

- Igualación

  Se debe despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualar los resultados para obtener una tercera ecuación de primer grado con una incógnita.

- Gráfico

  Se debe despejar a la misma variable de ambas ecuaciones después, mediante una tabulación, se forman parejas ordenadas donde la variable dependiente es la incógnita despejada. Ya con las parejas ordenadas se grafican las ecuaciones y, si se interceptan, el punto de intersección será la solución del sistema.

- Determinantes

  Se calcula el determinante del sistema y de cada una de las variables. Para conocer el resultado se debe realizar la división del determinante de cada variable entre el determinante del sistema.

A continuación se presentarán las soluciones a algunos sistemas de ecuaciones por diferentes métodos.

Para comprobar si las respuestas son correctas se sustituyen ambos valores en las ecuaciones originales si, después de hacer las operaciones, la igualdad se cumple entonces se ha resuelto el sistema correctamente.

✺ Ejemplo de cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por medio del **método gráfico**

$$2x - y = 3 \qquad ...(1)$$
$$6x - 5y = 5 \qquad ...(2)$$

Primero notamos que es un sistema consistente, tiene una solución. Después debemos despejar a la variable *y* de ambas ecuaciones.

De la ecuación (1) se tiene que:

$$2x - y = 3$$
$$-y = 3 - 2x$$
$$\boxed{y = 2x - 3}$$

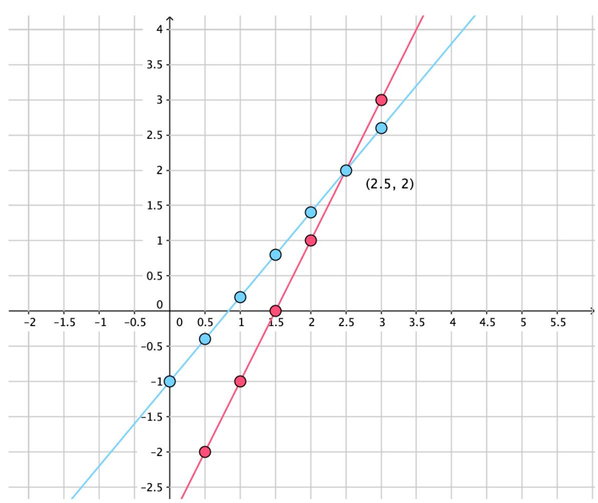
De la ecuación (2) se tiene que:

$$6x - 5y = 5$$
$$-5y = 5 - 6x$$
$$y = \frac{5 - 6x}{-5}$$
$$\boxed{y = \frac{6}{5}x - 1}$$

La tabulación para ambas ecuaciones es la siguiente

x	y	punto		x	y	punto
0	**2(0) – 3 = –3**	**(0, –3)**		**0**	**6(0)÷5 –1 = –1**	**(0, –1)**
0.5	**2(0.5) – 3 = –2**	**(0.5, –2)**		**0.5**	**6(0.5)÷5 –1 = –0.4**	**(0.5, –0.4)**
1	**2(1) – 3 = –1**	**(1, –1)**		**1**	**6(1)÷5 –1 = 0.2**	**(1, 0.2)**
1.5	**2(1.5) – 3 = 0**	**(1.5, 0)**		**1.5**	**6(1.5)÷5 –1 = 0.8**	**(1.5, 0.8)**
2	**2(2) – 3 = 1**	**(2, 1)**		**2**	**6(2)÷5 –1 = 1.4**	**(2, 1.4)**
2.5	**2(2.5) – 3 = 2**	**(2.5, 2)**		**2.5**	**6(2.5)÷5 –1 = 2**	**(2.5, 2)**
3	**2(3) – 3 = 3**	**(3, 3)**		**3**	**6(3)÷5 –1 = 2.6**	**(3, 2.6)**

Se observa que este es el punto de intersección de las dos rectas, es la solución. Las gráficas son:



La solución es
x= 2.5   y = 2

Comprobación

Para la ecuación (1)

$$2x - y = 3 \quad \ldots(1)$$

$$2(2.5) - 2 = 3$$

$$5 - 3 = 3$$

$$3 = 3$$

Para la ecuación (2)

$$6x - 5y = 5 \quad \ldots(2)$$

$$6(2.5) - 5(2) = 5$$

$$15 - 10 = 5$$

$$5 = 5$$

Ejemplo de cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por medio del **método de adición o sustracción**

$$4x + 2y = 6 \quad \ldots(1)$$

$$2x + 3y = 7 \quad \ldots(2)$$

Este sistema es consistente por lo que tiene una solución. Para resolverlo multipliquemos la ecuación (2) por 2

$$(2x + 3y = 7) \cdot 2 \quad \ldots(2')$$

$$4x + 6y = 14 \quad \ldots(2')$$

Trabajemos con las ecuaciones (1) y (2')

$$4x + 2y = 6 \quad \ldots(1)$$

$$4x + 6y = 14 \quad \ldots(2')$$

Realicemos la operación (2') – (1)

$$0x + 4y = 8 \quad \ldots(3)$$

$$4y = 8$$

Al resolver la ecuación (3) se tiene que

$$y = \frac{8}{4}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Para hallar el valor de x se sustituye el de y en la ecuación (2)

$$2x + 3y = 7 \quad \ldots(2)$$

$$2x + 3(2) = 7$$

$$2x + 6 = 7$$

$$2x = 7 - 6$$

$$2x = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

La solución es $x = \frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{y = 2}$

Comprobación

Para la ecuación (1)

$$4x+2y=6 \qquad \text{...(1)}$$
$$4\left(\tfrac{1}{2}\right)+2\left(2\right)=6$$
$$2+4=6$$
$$6=6$$

Para la ecuación (2)

$$2x+3y=7 \qquad \text{...(2)}$$
$$2\left(\tfrac{1}{2}\right)+3\left(2\right)=7$$
$$1+6=7$$
$$7=7$$

Ejemplo de cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por medio del **método de sustitución**

$$5x-7y=17 \qquad \text{...(1)}$$
$$x+9y=-7 \qquad \text{...(2)}$$

Se observa que este sistema es consistente, tiene una solución. Para resolverla por el método de sustitución despejaremos a x de la ecuación (2)

$$x+9y=-7 \qquad \text{...(2)}$$
$$x=-7-9y \qquad \text{...(2')}$$

Este resultado lo sustituimos en (1) para obtener una ecuación para la variable y.

$$5x-7y=17 \qquad \text{...(1)}$$
$$5\left(-7-9y\right)-7y=17$$
$$-35-45y-7y=17$$
$$-35-52y=17$$
$$-52y=17+35$$
$$-52y=52$$
$$y=\frac{52}{-52}$$
$$\boxed{y=-1}$$

Para saber el valor de x sustituimos el valor de y en (2')

$$x=-7-9y \qquad \text{...(2')}$$
$$x=-7-9\left(-1\right)$$
$$x=-7+9$$
$$\boxed{x=2}$$

La solución es $\boldsymbol{x=2}$ y $\boldsymbol{y=-1}$

Comprobación.

Para la ecuación (1)

$$5x-7y=17 \qquad \textbf{...}(1)$$

$$5(2)-7(-1)=17$$

$$10+7=17$$

$$17=17$$

Para la ecuación (2)

$$x+9y=-7 \qquad \textbf{...}(2)$$

$$(2)+9(-1)=-7$$

$$2-9=-7$$

$$-7=-7$$

Ejemplo de cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por medio del **método de determinantes**

$$\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{2}y=6 \qquad \textbf{...}(1)$$

$$\tfrac{1}{2}x+y=7 \qquad \textbf{...}(2)$$

Se calcula el determinante del sistema, colocando en la primera columna los coeficientes de la variable *x* y en la segunda, los de la variable *y*:

$$\Delta_S=\begin{vmatrix}\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\tfrac{2}{3}(1)-\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{8-3}{12}=\tfrac{5}{12}$$

Se calcula el determinante de la variable *x*, colocando en la primera columna los resultados de las ecuaciones y en la segunda, los coeficientes de la variable *y*:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}6 & \tfrac{1}{2}\\ 7 & 1\end{vmatrix}=6(1)-7\left(\tfrac{1}{2}\right)=6-\tfrac{7}{2}=\tfrac{12-7}{2}=\tfrac{5}{2}$$

Se calcula el determinante de la variable *y*, colocando en la primera columna los coeficientes de la variable *x* y en la segunda, los resultados de las ecuaciones:

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}\tfrac{2}{3} & 6\\ \tfrac{1}{2} & 7\end{vmatrix}=\tfrac{2}{3}(7)-\left(\tfrac{1}{2}\right)6=\tfrac{14}{3}-\tfrac{6}{2}=\tfrac{14}{3}-3=\tfrac{14-9}{3}=\tfrac{5}{3}$$

El valor de x es $\frac{\Delta_x}{\Delta_S}$ y el de la incógnita y, $\frac{\Delta_y}{\Delta_S}$

$$x=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{12}}=\frac{12\cdot5}{2\cdot5}=\frac{12}{2}=6$$

$$y=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{12}}=\frac{12\cdot5}{3\cdot5}=\frac{12}{3}=4$$

La solución es ***x* = 6** y ***y* = 4**

Comprobación:

Para la ecuación (1)

$$\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{2}y=6 \qquad \textbf{...}(1)$$

$$\tfrac{2}{3}(6)+\tfrac{1}{2}(4)=6$$

$$2(2)+2=6$$

$$4+2=6$$

$$6=6$$

Para la ecuación (2)

$$\tfrac{1}{2}x+y=7 \qquad \textbf{...}(2)$$

$$\tfrac{1}{2}(6)+(4)=7$$

$$3+4=7$$

$$7=7$$

Ejercicios. **Usa correctamente las reglas de la Ortogramática.**

I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por todos los métodos revisados:

a) $\begin{aligned} 2x-3y&=1 \\ x+3y&=5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x+2y&=8 \\ 2x+y&=7 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x+9y&=8 \\ 3x+10y&=5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x-2y&=-1 \\ 2x+3y&=12 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x-2y&=-29 \\ 4x-3y&=-41 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} \tfrac{5}{2}x+3y&=20 \\ 3x+2y&=16 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{2}y&=\tfrac{5}{2} \\ x-6y&=-3 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}y&=0 \\ x+\tfrac{2}{3}y&=8 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 5x-4y&=-13 \\ 5x+4y&=-7 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 3x+2y&=-4 \\ 4x+9y&=1 \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} 7x+6y&=-8 \\ x+y&=-2 \end{aligned}$

l) $\begin{aligned} 4x-3y&=34 \\ x+2y&=7 \end{aligned}$

m) $\begin{aligned} x+y&=2 \\ 4x-2y&=-1 \end{aligned}$

n) $\begin{aligned} 3x+2y&=7 \\ 3x-2y&=1 \end{aligned}$

ñ) $\begin{aligned} x+y&=-3 \\ x-3y&=5 \end{aligned}$

Referencias

CAB. UNAM. (2011). MathMedia. Ortogramática. D.F. México. Recuperado de http://cuaed.unam.mx/math_media/algebra/ortogramatica/index.php.html

Bernardo, K. (2000). El arte editorial en la literatura científica. D.F. México. Recuperado de https://www.fis.unam.mx/~bwolf/ElArteEditorial.pdf

Bezos, J. (2016). Ortotipografía y notaciones matemáticas. Madrid. España: *TeXnia*. Recuperado de http://www.texnia.com/archive/ortomatem.pdf

Moreira, M. A. (2003). Lenguaje y aprendizaje significativo. (traducción de Rodríguez M. L.) Porto Alegre. Brasil: *Prof. Marco Antonio Moreira.* Recuperado de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/lenguaje.pdf

Ortega D. J. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje?. https://www.researchgate.net/publication/26428243_Matematicas_Un_problema_de_lenguaje

Rees, P. y Sparks, F. (2007) Álgebra. D.F. México. Mc Graw Hill.

Soluciones a los ejercicios

Propiedades utilizadas en las operaciones.

I. a) 52 b) 75 c) 3 d) 26 e) 3

Operaciones binarias con racionales.

Adiciones

I. a) $\frac{17}{3}$ b) $-\frac{54}{7}$ c) $\frac{78}{7}$ d) $-\frac{17}{2}$ e) $\frac{37}{8}$ f) $-\frac{13}{2}$

g) $-\frac{28}{3}$ h) $-\frac{31}{4}$

II. a) $\frac{13}{14}$ b) $\frac{31}{15}$ c) $\frac{27}{35}$ d) $\frac{113}{42}$ e) $-\frac{32}{15}$ f) $-\frac{9}{4}$

g) $-\frac{28}{3}$ h) $-\frac{31}{4}$

III. a) $\frac{199}{840}$ b) $\frac{1157}{210}$ c) $\frac{347}{60}$ d) $-\frac{5}{3}$ e) $\frac{2}{15}$ f) $-\frac{17}{4}$

g) $\frac{73}{30}$ h) $-\frac{86}{35}$

Multiplicaciones

I. a) $\frac{32}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{1}{7}$ d) 15 e) $\frac{15}{8}$ f) 35

II. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{35}$ d) $\frac{5}{6}$ e) 1 f) $\frac{1}{8}$

III. a) $\frac{1}{14}$ b) $\frac{27}{35}$ c) $\frac{2}{5}$ d) 14 e) $\frac{1}{70}$ f) $\frac{63}{200}$

g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{81}{10}$

IV. a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{70}$ d) $\frac{27}{250}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{5}{36}$

g) $\frac{216}{11}$ h) $\frac{45}{88}$ i) $\frac{81}{125}$

Divisiones

I. a) 12 b) $\frac{56}{3}$ c) $\frac{35}{4}$ d) $-\frac{1}{10}$ e) $\frac{7}{24}$ f) $-\frac{7}{10}$

g) $\frac{5}{18}$ h) $-\frac{8}{7}$ i) $\frac{3}{4}$ j) $\frac{50}{27}$ k) $\frac{23}{22}$ l) $-\frac{28}{9}$

m) $\frac{7}{6}$ n) $\frac{99}{58}$ ñ) $\frac{3}{4}$ o) $\frac{4}{a^2}$ p) $\frac{2-\pi^2}{2+\pi^2}$ q) $-\frac{26ab}{12-3b^2}$

Exponentes

I. a) 3^7 b) a^4 c) x^{15} d) $t^{-2}=\frac{1}{t^2}$ e) $p^{-5}=\frac{1}{p^5}$ f) $5^{-10}=\frac{1}{5^{10}}$

g) x h) $3^{-4}=\frac{1}{3^4}$ i) a^{12} j) $5^{-9}=\frac{1}{5^9}$ k) $x^{-9}=\frac{1}{x^9}$ l) 4^6

m) h^2 n) a^{-5} ñ) p^6 o) b^{-4} p) n^9 q) 5^{-7}

r) $\sqrt[3]{a^2}$ s) $\sqrt[5]{5^3}$ t) $\sqrt[4]{p^3}$ u) $\sqrt[11]{3^6}$ v) $\sqrt[8]{7}$ w) $\sqrt[4]{b^7}$

x) $\frac{1}{w^{\frac{6}{7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{w^6}}$ y) $\frac{1}{9^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9^2}}$ z) $\frac{1}{6^{\frac{8}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{6^8}}$

II. a) 4^{10} b) $\frac{1}{c^2}$ c) $\frac{1}{x^6}$ d) a^5 e) $\frac{1}{x^{\frac{13}{6}}}$ f) $e^{\frac{103}{35}}$

g) $\frac{1}{5^{\frac{22}{3}}}$ h) $t^{\frac{5}{6}}$ i) $\frac{1}{2^{36}}$

III. a) $\sqrt[6]{x^{23}}$ b) $\sqrt[4]{a^{17}}$ c) $\sqrt[20]{c^{53}}$ d) $\sqrt[6]{y^5}$ e) $\sqrt[24]{h^{13}}$ f) $\sqrt[1680]{x}$

Jerarquía de operaciones

I. a) –57 b) –5 c) –12 d) 3 e) 5 f) 2

g) 7 h) –9 i) 0 j) –21

Lenguaje algebraico

I. a) $a+b$ b) $x-y$ c) $u\cdot v$ d) $a\cdot b\cdot c-5$ e) $3x$ f) $x\cdot x$

g) $\frac{a}{b}$ h) $\frac{a+b}{x}$ i) $\frac{a-b}{x}$ j) $\frac{x+y}{x-y}$ k) x^2+13 l) a^3-6

m) $3h^2$ n) $\sqrt{xy}$ ñ) a^2+b^2 o) $(a-b)^2$ p) $(x+y)^3$ q) $\frac{x^2}{2}$

r) $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ s) $\frac{a^3}{3}$ t) $a+b+c$ u) $x+3=8$ v) $3x=2y$

II. a) $a+4$ b) $2x$ c) $3y-2$ d) $2n+1$ e) $2x+k$ f) $\frac{x}{5}$

g) $2n$ h) $\frac{x}{4}-2$ i) $\frac{a}{x}$ j) $\frac{x-4}{6}$ k) $2(x+8)$ l) $(2n+1)-10$

m) $x\cdot x$ n) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ ñ) $\frac{p+q}{2}$ o) x^2+k p) $(x+k)^2$ q) $a,\ a+1,\ a+2$

r) $2n,\ 4n,\ 6n$ s) $2n+1,\ 4n+1,\ 6n+1$ t) $\frac{1}{x}$ u) $(a+a+1+a+2)^2$

v) $\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$ w) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3$ x) $\frac{(p+q)^2}{(x-3)^3}$

III. a) *La diferencia de dos números* b) *Cinco veces un número* c) *El doble producto de la suma de dos números* d) *La semisuma de un número y 2* e) *La tercera parte de un número* f) *La tercera parte de la suma de dos números* g) *La suma del cuadrado de dos números* h) *El cuadrado de la suma de dos números* i) *El doble del cuadrado de la suma de dos números* j) *El cuadrado de la semisuma de dos números* k) *El cubo de la semi diferencia de dos números* l) *La raíz cuadrada de la suma del cuadrado de un número y 3.*

De la aritmética al álgebra.

I. a) $\frac{3a+b}{3}$ b) $\frac{3a+2}{3}$ c) $\frac{10-b}{5}$ d) $\frac{ab-1}{b}$ e) $\frac{2x+9}{2}$ f) $\frac{7y-3}{7}$

g) $\frac{ay+x}{y}$ h) $\frac{hn-k}{n}$

II. a) $\frac{9xy+4}{3y}$ b) $\frac{7a}{3}$ c) $\frac{4x+y}{2}$ d) $\frac{10p-6a}{5}$ e) $\frac{45bx+7a}{9b}$ f) $\frac{11p}{10}$

g) $\frac{82x}{9}$ h) $\frac{5x-6}{5}$ i) $\frac{50x+3a}{10x}$

III. a) $\frac{18a^3+1}{2a}$ b) $\frac{-27b^2+2a}{9b}$ c) $\frac{64x^{11}-7}{8x^6}$ d) $\frac{45a^9+7x}{9a^7}$ e) $\frac{88b^{17}+3x}{9b}$

f) $\frac{60k^{25}-x}{10k^{20}}$ g) $\frac{130x^{21}-9a^4}{10x^{16}}$ h) $\frac{63a^{13}+2x^6}{9a^8}$

IV. a) $\frac{5y-2x}{2y}$ b) $\frac{5x+2y}{10}$ c) $\frac{ac+4d}{ad}$ d) $\frac{ay+12}{4y}$ e) $\frac{6y+6x}{xy}$

f) $\frac{2x-3y}{12}$ g) $\frac{7d-3c}{3d}$ h) $\frac{b-a}{ab}$

V. a) $\frac{9bp+8aq}{6bq}$ b) $\frac{50x+24a}{15a}$ c) $\frac{14x-9ah}{7a}$ d) $\frac{63y-8ax}{28xy}$ e) $\frac{24ak+4xy}{3xk}$

f) $\frac{15xy-16ab}{10ay}$ g) $\frac{3ay-x}{2y}$ h) $\frac{b-a}{ab}$ i) $\frac{3a+8x^2}{12ax}$

VI. a) $\frac{8h^4-9k^5}{12hk^2}$ b) $\frac{24x^5+5y^4}{30x^4y}$ c) $\frac{9x^3-14a^6}{6a^3x^2}$ d) $\frac{35a^5y^2+12x^2y^2}{30a^5x^2}$

e) $\frac{80x^{10}+15y^{11}}{24x^7y^5}$ f) $\frac{35y^{13}-72x^{14}}{56x^8y^8}$ g) $\frac{60x^9-104a^{13}}{65a^6x^4}$ h) $\frac{9x^{10}+9b^{12}}{2b^5x^5}$

VII. a) $\frac{9a^6x^{12}+b^{12}d^5}{2a^5b^5d^2x^7}$ b) $\frac{18x^{21}y^5z^2+28a^2b^{11}c^7}{63a^2b^5c^7x^{19}}$ c) $\frac{4a^{13}h^5x^{12}+27b^9c^{12}d^{11}}{6a^7b^4c^5d^9h^3x^7}$

d) $\frac{16x^{14}y^{24}+27a^{22}b^{67}}{72a^{12}b^{50}x^8y^{12}}$

Productos notables y factorización

I. a) $3a-b$ b) $7x^2-x$ c) $-\frac{47}{30}x$ d) $-4x^5-4a^3-x^2-2a^2+8$

e) $\frac{2}{3}\pi^4-\frac{1}{2}e^2-6\pi^2+5e^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{3}\pi^{\frac{1}{4}}$ f) $-\frac{2}{3}x^5+\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}-5y^{-4}$

II. a) $12x^4-6x^3+15x^2+21x-6$ b) $2x^4-4x^3+5x^2-2x$ c) $\frac{10}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+\frac{20}{3}$

d) $\frac{4}{3}y^6-\frac{2}{5}y^4+\frac{2}{5}y^{\frac{3}{2}}+7y^{\frac{5}{2}}-5y$ e) $6b^6+8b^5-6b^3+8b^2-4b$

f) $6a^6-2a^{\frac{5}{2}}+\frac{16}{5}a^{\frac{11}{3}}-20a^3$

III. a) $4,x,6$ b) $-8,b,6$ c) $-27,a,\frac{2}{5}$ d) $7,x,17$ e) $6,y,-3$

IV. a) $-4a^2b-2ab^2$ b) $2x^5y^2+x^2y^2$ c) $11y^2a^{10}-5y^2a^2+9a^{10}+11y^2$

d) $\frac{18}{5}xy^2+3x^4-3$ e) $-5a^4b^{-4}+20ab^4-21a^4+6ab^{-4}-b$

V. a) $2,\ 2(a+2)$ b) $a,\ a(1+a)$ c) $x^2,\ x^2(1+x^3)$ d) $y,\ y(3+4y+5y^2)$

e) $2a,\ 2a(a^2+3a-2)$ f) $4c,\ 4c(c^2-3c+2)$

g) $5x^2y^2,\ 5x^2y^2(4x+5y)$ h) $7xy^2z,\ 7xy^2z(2x-3yz)$

i) $5a^2b^5x^2,\ 5a^2b^5x^2(2a^2x+7b^2)$ j) $5xyz,\ 5xy(3y-5x^2+6x^2yz)$

Producto de dos binomios con un término en común

I. a) $y^2+19y+88$ b) $n^2+15n+50$ c) $h^2+20h+91$ d) $b^2+19b+70$

e) $x^2+\frac{26}{3}x+\frac{16}{3}$ f) $y^2+\frac{37}{7}y+\frac{10}{7}$ g) $h^2+\frac{27}{2}h+\frac{81}{2}$ h) $n^2+\frac{53}{5}n+6$

i) $a^2+\frac{34}{7}a+\frac{24}{7}$ j) $p^2+\frac{78}{7}p+\frac{11}{7}$

II. a) $x^2-12x+20$ b) $y^2-15y+54$ c) $a^2-11a+28$ d) $r^2-12r+20$

e) $t^2-32t+240$ f) $n^2-16n+55$ g) $y^2-\frac{9}{10}y+\frac{1}{5}$ h) $x^2-\frac{41}{12}x+\frac{35}{12}$

i) $t^2-\frac{9}{14}t+\frac{1}{14}$ j) $x^2-\frac{43}{28}x+\frac{5}{14}$ k) $y^2-\frac{69}{20}y+\frac{27}{10}$ l) $k^2-\frac{46}{21}k+\frac{8}{7}$

III. a) a^2-7a-8 b) x^2-x-72 c) $y^2-14y-72$ d) $n^2+3n-130$

e) $h^2-19h-20$ f) $m^2-15m-34$ g) $a^2-18a-88$ h) $t^2+6t-55$

i) $x^2+\frac{11}{2}x-\frac{21}{2}$ j) $b^2+\frac{13}{3}b-10$ k) $n^2-\frac{9}{20}n-1$ l) $y^2+\frac{13}{18}y-\frac{7}{6}$

Factorización de un trinomio.

I. a) $(x+9)(x+2)$ b) $(c-5)(c-6)$ c) $(h+6)(h-5)$ d) $(y-5)(y-4)$

e) $(k+9)(k+3)$ f) $(y-5)(y+3)$ g) $(u-10)(u-1)$ h) $(w-9)(w-5)$

i) $(p+6)(p+3)$ j) $(k+11)(k-3)$

El cuadrado de un binomio

I. a) $x^2+2xy+y^2$ b) $81+18q+q^2$ c) $x^4+2x^2y+y^2$ d) $4h^2+20h+25$

e) $16+24f+9f^2$ f) $25x^{10}+30x^5y^2+9y^4$ g) $9-6x+x^2$ h) $z^2-10z+25$

i) $4a^2-4ab+b^2$ j) $4m^2-24mn+36n^2$ k) $a^2-2ab+b^2$ l) $81-18q+q^2$

II. a) $1+2x+x^2$ b) b^2-6b+9 c) $25+10x+x^2$ d) $49y^2-112y+64$

e) $25+90t+81t^2$ f) $4x^2-20xy+25y^2$ g) $a^4+2a^2b^3+b^6$ h) $x^{12}+2x^6h^3+h^6$

i) $16-8a+a^2$ j) $b^2-4ab+4a^4$ k) $49x^2+28xy+4y^2$ l) $x^8-2x^4y^3+y^6$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

I. a) $(y+h)^2$ b) $(2+b)^2$ c) $(x+4)^2$ d) $(y+k)^2$

e) $(h+10)^2$ f) $(\pi+3)^2$ g) $(n+m)^2$ h) $(t+5)^2$

i) $(w+z)^2$ j) $(x+7)^2$ k) $(u+8)^2$ l) $(1+x)^2$

m) $(r+3)^2$ n) $(j+11)^2$ ñ) $(i+k)^2$ o) $(12+a)^2$

p) $(p+q)^2$ q) $(h+7)^2$

El producto de dos binomios conjugados

I. a) r^2-t^2 b) r^2-s^2 c) c^2-4a^2 d) $4h^2-9k^2$

e) $25x^4-y^2$ f) $y^{10}-p^6$ g) $36a^4-4b^{10}$ h) $9f^{10}-4g^{12}$

i) 5^6-x^{10} j) $4x^4y^6-25c^6d^{14}$ k) $9y^6-49x^{10}$ l) $64a^{10}-9b^{16}$

m) $16a^2b^2-9c^2d^2$ n) $t^{18}-p^4$ ñ) $4a^2-49b^2$ o) r^8-16

Factorización de una diferencia de cuadrados

I. a) $(a+b)(a-b)$ b) $(y+10)(y-10)$ c) $(h+4)(h-4)$ d) $(5+k)(5-k)$

e) $(u+6)(u-6)$ f) $(8+p)(8-p)$ g) $(w+\sqrt{u})(w-\sqrt{u})$ h) $(\sqrt{b}+4)(\sqrt{b}-4)$

i) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ j) $\left(x+\sqrt{8}\right)\left(x-\sqrt{8}\right)$ k) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

l) $\left(y+4\right)\left(y-4\right)$ m) $\left(\sqrt{u}+2\right)\left(\sqrt{u}-2\right)$ n) $\left(q+\sqrt{p}\right)\left(q-\sqrt{p}\right)$

ñ) $\left(2+\sqrt{y}\right)\left(2-\sqrt{y}\right)$ o) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{q}\right)$

Factorizaciones diversas

I. a) $\left(a-3\right)\left(a+3\right)$ b) $\left(k-12\right)^2$ c) $\left(x-4\right)\left(x+4\right)$ d) $\left(y-11\right)\left(y+11\right)$

e) $\left(p+10\right)\left(p+7\right)$ f) $\left(c-7\right)^2$ g) $\left(m-6\right)^2$ h) $\left(u+8\right)\left(u-1\right)$

i) $\left(d-14\right)\left(d-1\right)$ j) $\left(x-9\right)\left(x-3\right)$ k) $\left(w-13\right)\left(w+13\right)$ l) $\left(t+7\right)\left(t-2\right)$

m) $\left(y-11\right)^2$ n) $\left(p-12\right)\left(p+12\right)$ ñ) $\left(y+7\right)\left(y+5\right)$ o) $\left(u-1\right)\left(u+1\right)$

p) $\left(y+11\right)\left(y+6\right)$ q) $\left(h+13\right)^2$ r) $\left(a-5\right)\left(a-6\right)$ s) $\left(b+8\right)^2$

t) $\left(g-2\right)^2$ u) $\left(x-5\right)^2$ v) $\left(y-9\right)\left(y+9\right)$ w) $\left(z-5\right)\left(z+5\right)$

x) $\left(x+9\right)^2$ y) $\left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)$ z) $\left(a-3\right)^2$

Fracciones algebraicas

I. a) $2x-1$ b) $\frac{2x-1}{x}$ c) $a+1$ d) $x-1$

e) $\frac{b^2-b-2}{b-1}$ f) $\frac{2x-2y}{x+y}$ g) $\frac{x+2}{x-1}$ h) 1

i) $\frac{2x-6y}{2x-3y}$ j) $\frac{x-1}{x+3}$

Ecuaciones de primer grado

I. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{7}$ c) $-\frac{5}{6}$ d) $\frac{17}{6}$ e) -4 f) $-\frac{11}{2}$

g) $-\frac{1}{5}$ h) $-\frac{1}{4}$ i) $\frac{4}{7}$ j) $\frac{17}{5}$ k) $\frac{33}{2}$ l) 10

II. a) -9 b) 6 c) -4 d) 1 e) 14 f) $-\frac{5}{7}$

g) $-\frac{14}{3}$ h) $\frac{41}{10}$ i) $-\frac{9}{20}$

III. a) $\frac{17}{7}$ b) $\frac{22}{17}$ c) 3 d) 1 e) $-\frac{13}{4}$ f) $-\frac{3}{22}$

g) $-\frac{23}{7}$ h) $-\frac{1}{24}$ i) $-\frac{5}{13}$

IV. a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{11}{7}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{12}{7}$ e) $\frac{\sqrt{3}-8}{9}$ f) $\frac{\sqrt{11}-4}{8}$

g) $\frac{18}{\sqrt{5}}$ h) $\frac{\sqrt{29}+9}{\sqrt{2}}$ i) $\frac{\sqrt{37}-\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$ j) $\frac{\sqrt{73}-\sqrt{123}}{-\sqrt{345}}$ k) $\frac{5\sqrt{37}-2\sqrt{14}}{5\sqrt{7}}$ l) $\frac{1-w}{\pi}$

m) $\frac{9-\sqrt{\pi}}{-\sqrt{k}}$ n) $\frac{3p-ab}{y}$ ñ) $\frac{8}{3}$ o) $-\frac{9}{16}$ p) $-\frac{7}{18}$ q) $\frac{59}{32}$

r) $-\frac{5}{3}$ s) $-\frac{5}{3}$ t) $\frac{27}{8}$ u) $-\frac{13}{21}$ v) $\frac{\pi\left(4e-1\right)}{e}$ w) $\frac{-b\left(a-c\right)}{ac}$

Ecuaciones de segundo grado.

I. a) $\pm\sqrt{12}$ b) $\pm\sqrt{72}$ c) $\pm\sqrt{75}$ d) $\pm\sqrt{27}$ e) $\pm\sqrt{80}$ f) $\pm\sqrt{50}$
g) $\pm\sqrt{46}$ h) ± 11 i) ± 7 j) $\pm\sqrt{3}$ k) $\pm\sqrt{35}$ l) ± 6
m) ± 10 n) $\pm\sqrt{2}$ ñ) $\pm\sqrt{101}$

II. a) ± 4 b) $\pm\sqrt{28}$ c) $\pm\sqrt{29}$ d) $\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$ e) ± 3 f) ± 4
g) $\pm\sqrt{33}$ h) $\pm\sqrt{2}$ i) $\pm\sqrt{20}$ j) $\pm\sqrt{15}$ k) $\pm\sqrt{12}$ l) $\pm\sqrt{5}$
m) $\pm\sqrt{\frac{80}{7}}$ n) $\pm\sqrt{14}$ ñ) $\pm\sqrt{8}$

III. a) $-\frac{3}{2},2$ b) $0,\frac{6}{5}$ c) $-1,3$ d) $-5,1$ e) $-5,2$ f) $-3,\frac{3}{2}$
g) $-4,\frac{2}{3}$ h) $-\frac{3}{4},3$ i) $\frac{1}{4},2$ j) $-\frac{3}{4},0$ k) $-4,\frac{4}{5}$ l) $-\frac{5}{4},\frac{3}{2}$
m) $-\frac{3}{2},-\frac{3}{5}$ n) $-\frac{3}{2},\frac{6}{7}$ ñ) $-\frac{3}{4},\frac{5}{3}$ o) $-\frac{2}{3},\frac{4}{5}$ p) $-\frac{4}{5},\frac{5}{6}$ q) $-\frac{5}{2},\frac{3}{2}$
r) $-1,\frac{3}{2}$ s) $2-2\sqrt{3},2+2\sqrt{3}$ t) $-3,\frac{3}{5}$

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

I. a) $x=2, y=1$ b) $x=2, y=3$ c) $x=-5, y=2$ d) $x=3, y=2$
e) $x=-5, y=7$ f) $x=2, y=5$ g) $x=3, y=1$ h) $x=4, y=6$
i) $x=-2, y=\frac{3}{4}$ j) $x=-2, y=1$ k) $x=4, y=-6$ l) $x=\frac{89}{11}, y=-\frac{6}{11}$
m) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$ n) $x=\frac{4}{3}, y=\frac{3}{2}$ ñ) $x=-1, y=-2$