MATEMÁTICAS I

UNIDAD 3

ECUACIONES LINEALES

ACTIVIDAD 1

ACCIÓN 3.1

SIGNIFICADOS BÁSICOS DE LA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

ACCIÓN 3.2

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA MEDIANTE MÉTODOS HEURÍSTICOS

ACCIÓN 3.3

BASES TEÓRICAS DE LA METODOLOGÍA ALGEBRAICA PARA LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

ACCIÓN 3.4

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

ACCIÓN 3.1

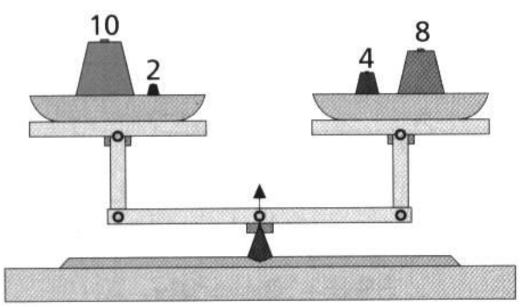
SIGNIFICADOS BÁSICOS DE LA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

Objetivo: el alumno debe aprender el traslado del lenguaje común al algebraico de una situación que involucre una ecuación lineal en una incógnita, tomando como base el significado de igualdad numérica para desarrollar el concepto de ecuación lineal con una incógnita y aplicarlo a casos específicos.

AL ESTUDIANTE: en el transcurso de esta acción vas a ir pasando de la idea intuitiva de "igualdad" al concepto matemático respectivo. Primero debes conocer la estrategia para usar adecuadamente el lenguaje algebraico al modelar una situación de la vida cotidiana, luego procederás a aplicar ese lenguaje algebraico en el caso específico de las ecuaciones lineales en una incógnita.

Cuando hablamos de manera coloquial es muy común referirnos a situaciones o cosas como iguales, como cuando alguien dice que Juan es igualito a su papá porque ambos tienen el cabello rubio, la piel morena o porque ambos son de complexión robusta. Pero si nos quedáramos en ese nivel nunca podríamos construir conceptos abstractos ni trabajar con ellos.

Al hablar de igualdad entre dos magnitudes lo que generalmente hacemos es abstraer una de las propiedades comunes a los objetos que estamos comparando. Como por ejemplo podemos decir que la edad del papá de Juan es el triple de la edad de Juan, no estamos diciendo que Juan sea igual a su papá, sino que estamos abstrayendo una propiedad en común que tienen los dos, la cual es su edad. Otra situación similar se presenta cuando decimos que el peso del papá de Juan es igual al doble del peso de Juan.



Al referirnos a igualdades numéricas tenemos que ver *que dos cantidades sean iguales*, es decir *que tengan el mismo valor aunque no estén expresadas de manera idéntica*, por ejemplo si vemos la siguiente figura, notaremos que la balanza está equilibrada, puesto que hay igual peso en el platillo de la izquierda que en el de la derecha, pero en de la izquierda hay dos pesas, una que pesa 10 y otra que pesa 2, y en el de la derecha también hay dos pesas, una que pesa 4 y otra que pesa 8.

Si lo anterior lo expresamos simbólicamente escribimos

$$10+2 = 4+8$$

Al sumar ambos lados de la igualdad nos da 12 = 12, lo cual es cierto, es decir que la igualdad numérica planteada es correcta.

Ejemplo 1. Ahora bien, podemos igualar una propiedad con un número, con la restricción de que esta propiedad debe ser numérica, por ejemplo, cuando decimos que la edad del papá de Juan es el triple de la edad de Juan y que sumadas ambas edades nos da 60.

Para poder escribir una igualdad con el enunciado anterior tenemos que utilizar alguna letra debido a que no conocemos la edad de Juan ni el de su papá, por ejemplo, si denotamos la edad de Juan como **e**, entonces la edad de su papá es 3**e** ya que su papá tiene el triple de edad que Juan, además sabemos que la suma de las dos edades es igual a 60, lo cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{e} + 3\mathbf{e} = 60$$

En la expresión matemática anterior está abstraído el enunciado del problema. Como ves, trabajar enunciados que impliquen igualdades y poder representarlos en forma simbólica es de suma importancia, ya que así estás extrayendo las propiedades importantes que plantea el enunciado, además de que te permite comprender de una manera más clara y sintética la igualdad expresada en palabras.

Cuando empleas letras para representar incógnitas o variables (magnitudes desconocidas) además de números para escribir simbólicamente un problema estás usando una ***expresión algebraica***.

Cuando la expresión algebraica tiene la forma de una igualdad constituye una ECUACIÓN ALGEBRAICA.

Así, la relación de las edades de Juan y de su papá **e** + 3**e** es una *expresión algebraica* mientras que la igualdad **e** + 3**e** = 60 es una *ecuación algebraica*.

De lo anterior lógicamente se desprende que toda ecuación algebraica es también una expresión algebraica y que hay expresiones algebraicas que no son ecuaciones algebraicas.

Analiza esta idea y escribe tus razones por las que consideras que es verdadera ____.

Escribe un ejemplo que apoye tu razonamiento: expresión algebraica que no es ecuación ________________, expresión algebraica que sí es una ecuación________________

Ejemplo 2. El peso de Oliver Hardy es el doble del peso de Stan Laurel y la suma del peso de los dos es 159 kilogramos.

Vamos a expresar este enunciado en forma de una ecuación algebraica, construyendo las expresiones algebraicas que la van a conformar.

Lee detenidamente el problema y contesta lo siguiente. ¿Cuál es la característica que se está comparando en los personajes que intervienen? ____________. Designa con una letra el peso de Laurel _________ para obtener así la primera expresión algebraica.

Si sabemos que el peso de Hardy es el doble del peso de Laurel, entonces escribe la expresión algebraica que corresponde al peso de Hardy ____________________

Con estas dos expresiones algebraicas y la otra condición relevante en el enunciado del problema, escribe a continuación la ecuación algebraica que corresponde al modelo matemático de dicho problema.

_______	+	________	=	_____
Peso de Laurel		Peso de Hardy		Suma de los pesos

AL ESTUDIANTE: a lo largo del curso has trabajado en forma aritmética para encontrar las respuestas correctas, ahora mediante el uso del lenguaje algebraico tendrás más opciones y herramientas para trabajar mejor los problemas como los que has resuelto hasta ahora, además de que te va a permitir resolver una gama mucho más amplia de problemas.

Ejemplo 3. Recordemos el primer problema en la Acción 1, Actividad I, Unidad I y tratemos a partir de ese enunciado de *traducir dicho problema a una ecuación algebraica*.

Los números de las tres casas que se muestran en la fotografía suman 36 y van creciendo de izquierda a derecha, ¿qué número tiene cada casa si…

a) … enfrente no hay casas por ser el cauce de un río?

Como no conoces el número de las casas escribe con una letra el número que representa a la primera de ellas __________

Al no haber casas en la parte de enfrente, ¿cómo debe ir la numeración? ____________

Usando la letra con que designaste el número de la casa escribe el número de la siguiente casa (recuerda que *no lo conoces*) _________________________

Usando la misma letra escribe el número de la casa que falta (recuerda que *tampoco lo conoces*) ____________________________

Con las anteriores expresiones algebraicas escribe la ecuación algebraica que representa el modelo matemático del problema.

____________________=____________

b) … sí hay casas en la acera de enfrente?

Repite en el espacio en blanco todas las operaciones del inciso *a*) para que construyas el modelo matemático correspondiente a este inciso.

En general, las letras que designan los valores o magnitudes desconocidas en el planteamiento de un problema se denominan ***incógnitas*** *o* ***variables*** *y se representan con las últimas letras del alfabeto:* **x** *si se trata de una sola incógnita,* **x** *y* **y** para dos incógnitas o si son tres incógnitas **x**, **y** *y* **z**, etcétera. Una definición provisional de ecuación lineal en una incógnita[1] es:

Si en una ecuación algebraica sólo hay una incógnita y ésta no está expresada en potencias mayores que uno (como sería el caso de x^2, x^3, etcétera) decimos que se trata de una ECUACIÓN LINEAL EN UNA INCÓGNITA.

Los cuatro ejemplos de ecuación algebraica que hemos visto en esta acción son ecuaciones lineales en una incógnita. Di porqué: __________________________

AL ESTUDIANTE: lo principal y más difícil para resolver un problema es traducirlo del lenguaje común en el que está expresado al lenguaje de las matemáticas, lo cual constituye *la construcción del modelo matemático*. Por eso, esta acción tiene como objetivo principal que aprendas a construir la ecuación lineal con una incógnita en una gran variedad de problemas.

Dada la gran variedad de problemas aplicados que se modelan con una ecuación lineal en una incógnita, se hace imposible establecer reglas específicas para

[1] La definición formal la estudiaremos en la acción 3.3 de esta unidad.

construir dicho modelo. En su caso, a continuación, te planteamos una *estrategia general* que debes seguir para construir estos modelos:

- El problema lo debes entender perfectamente, de no ser así, estarás paralizado(a) sin saber qué hacer o sólo construirás expresiones algebraicas sin sentido para el problema.

- Para estar seguro de que has comprendido el problema debes *identificar y saber explicar el significado de la incógnita o incógnitas* que tiene el enunciado, *representando a una de ellas con* **x** *y expresando a las otras en función* **x**, con esto estableces las expresiones algebraicas que se generan con la incógnita **x**.

- Además, debes *saber cuáles son los datos conocidos y las relaciones que los vinculan con las expresiones algebraicas* y establecer la igualdad que dará lugar a la ecuación lineal en una incógnita.

Empecemos con el siguiente problema:

Ejemplo 4. En una tienda donde se vende equipo de cómputo se vendieron 28 computadoras en tres días. Si el segundo día se vendieron 2 computadoras más que el primer día y el tercer día se vendió una menos que el primero, ¿cuántas computadoras se vendieron cada día?

Muy bien, el problema nos está hablando de las ventas que ocurren en una tienda en un periodo de tres días. Si lo leemos con detenimiento veremos que las ventas del segundo y tercer días se comparan (o están en función de) con las ventas que ocurrieron el primer día. Entonces ¿cuál es la incógnita o variable con la que se debe construir la ecuación lineal de este problema? ________________________.
Designa esta incógnita con la letra **x**.

Con base en la incógnita **x** contesta las preguntas: ¿Cuántas computadoras se vendieron el segundo día? __________ y el tercer día, ¿cuántas se vendieron? __________.

Así, con las tres expresiones algebraicas que ya tienes y el dato que nos dice cuántas computadoras se vendieron en los tres días puedes establecer la igualdad que nos da el modelo matemático del problema.

____ + _______ + _______ = ____

Si sumas la incógnita, la ecuación lineal se expresa con dos sumandos en la forma:

______ + ____ = ____

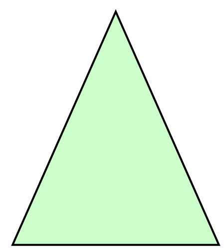
Ejemplo 5. Un ciclista desea competir en las olimpiadas. Para eso debe participar en tres carreras eliminatorias y promediar un tiempo máximo de 23 minutos. En la primera carrera obtuvo un tiempo de 25 minutos y 15 segundos; en la segunda hizo 23 minutos y 45 segundos. ¿Qué tiempo debe hacer en la tercera eliminatoria para calificar exactamente con los 23 minutos que como máximo se requieren?

En esta situación, en principio deben convertirse los tiempos de las dos primeras eliminatorias al sistema decimal: 25 minutos con 15 segundos en el sistema decimal son _______ minutos, y 23' 45'' equivale a _______ minutos en el sistema decimal.

Lee detenidamente el problema, si es necesario varias veces, y responde: ¿cuál es la incógnita en este caso? ____.

Promediar es una palabra clave para entender el problema, si ya lo sabes, entonces puedes pasar a escribir la igualdad que te proporciona la ecuación lineal en dicha incógnita. Hazlo en el siguiente espacio.

Ejemplo 6. En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 6 cm más que la base. Si sabemos que el perímetro del triángulo mide 48 cm. ¿Cuál será la longitud de cada uno de sus lados?



a) Si la incógnita **x** es la base del triángulo, construye la ecuación lineal en una incógnita.

b) Si la incógnita **x** es la longitud de los lados iguales del triángulo isósceles, construye la ecuación lineal en una incógnita.

c) ¿Es la misma ecuación en ambos casos? Explica tu respuesta.

Ahora ya puedes construir por cuenta propia la ecuación lineal en una incógnita de los siguientes problemas:

Problema 1. A Noemí le heredaron un terreno de forma rectangular el testamento dice que el terreno tiene de largo el doble del ancho y que el perímetro es de 90 metros ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Problema 2. Silvia tiene el doble de años de Luis, más 3. Si la edad de Silvia menos la edad de Luis da como resultado 10, ¿cuántos años tiene cada uno?

Problema 3. Una máquina que despacha refrescos recibe monedas de \$1, \$2, \$5 y \$10. Al final de un día el proveedor que surte a la máquina recogió 400 monedas, reportando que la cantidad de monedas de \$5 es el doble de las de \$10, que la cantidad de monedas de \$2 es igual a la de monedas de \$10 y que la cantidad de monedas de \$1 es el cuádruplo de las monedas de \$10. ¿Cuántas monedas hay de cada denominación?

Problema 4. Los números de las cuatro casas que se muestran en la fotografía suman 550 y van creciendo de izquierda a derecha, ¿qué número tiene cada casa si la incógnita **x** es el número de la segunda casa?

Problema 5. En una tienda de música un álbum de CD's cuesta \$600. Por aniversario todos sus productos están en oferta rebajados 20%, si compras el álbum, ¿de cuánto va a ser el descuento?

Problema 6. Con la credencial del INAPAM el descuento en el pago puntual del impuesto predial anual es de 40%. Si el señor Jorge pagó en enero \$820, ¿cuánto es el monto del impuesto sin descuento?

Problema 7. En una tienda departamental, en la gran venta anual por fin de temporada unos pants tienen el 40% de descuento, además en la etiqueta está un círculo verde que significa un descuento adicional de 30% después de aplicar el descuento original. Si el cliente pagó \$756 por dicha prenda, ¿de cuánto era el precio original?

Problema 8. Para una fiesta de graduación de estudiantes de bachillerato de un colegio se vendieron 405 boletos. Los boletos en preventa tuvieron un costo de \$150 y el día del evento costaron \$200. Si el total recaudado fue de \$68,000, ¿cuántos boletos se vendieron en preventa?

Una función lineal nos conduce a una ecuación lineal cuando conocemos el valor de la variable dependiente **y** = **f(x)** y deseamos ver a qué valor de la variable independiente **x** corresponde.

Problema 9. En el problema de las escalas de temperatura, se tiene la función lineal **y = 1.8x + 32**, donde **y** representa grados Fahrenheit, en tanto **x** se refiere a grados centígrados; si sabemos que en un momento dado la temperatura es de 104°F, eso nos da origen a la ecuación lineal en una incógnita **1.8x + 32 = 104**. En relación con las escalas, ¿qué sentido tiene esta ecuación? ______________________________

Formula la ecuación lineal en una incógnita en la que se lee el mismo valor en ambas escalas ________________________.

Ahora formula la ecuación lineal en una incógnita para la cual los grados Fahrenheit son el doble de los grados centígrados. ________________________.

Problema 10. En relación con el caso del empresario que vende máquinas textiles el modelo matemático general es la función lineal **y = 10 - 1.5x**, para el valor de **y** = 10 tenemos la ecuación lineal en una incógnita **-1.5x + 10 = 10**. ¿Qué significado tiene esta ecuación en el contexto del empresario? __________________________
Otra ecuación lineal es **-1.5x + 10 = -5**. ¿Qué significado tiene esta ecuación? ____

Problema 11. Respecto al problema del agente de seguros el modelo matemático general es la función lineal **y = 500x – 1000**; con esta función lineal construye tres ecuaciones lineales en una incógnita para cada uno de los valores **y** = -1000, **y** = 0 y **y** = 9000. _______________ , _______________ , _______________ . ¿A qué situación corresponde cada una de estas tres ecuaciones? ___________________________________,
__________________________________,
___________________________________.

Problema 12. Ahora construye tres ecuaciones lineales en una incógnita distintas que tengan sentido real en relación con la función lineal del problema referido al EDI aplicado a los alumnos de nuevo ingreso al CCH (revisa la función que construiste en la acción 2 de la actividad 2 de la unidad anterior). _______________ , _______________ , _______________ . Explica el sentido de cada ecuación. ___________________________________,
___________________________________,
___________________________________.

Problema 13. Para la función lineal correspondiente al perímetro del círculo en función del radio, construye otras tres ecuaciones lineales en una incógnita. ____________ , _____________ , _____________ . ¿Por qué escogiste estos

valores para la variable **y**? _______________________________________.

FIN DE LA ACCIÓ

ACCIÓN 3.2

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA MEDIANTE MÉTODOS HEURÍSTICOS[2]

Objetivo: el alumno debe aprender a resolver una ecuación lineal con una incógnita usando la intuición y la lógica concreta en la expresión algebraica particular que se está trabajando, es decir debe usar la heurística para resolver la ecuación que resulta del traslado del lenguaje común al lenguaje algebraico.

> **AL ESTUDIANTE:** en esta acción vas a buscar cómo resolver las ecuaciones que acabas de construir, pero tendrás que emplear tu creatividad e imaginación. Todos tenemos esas cualidades, sólo necesitarás bastante confianza en ti mismo y una buena dosis de lógica intuitiva. Con las orientaciones adecuadas de tu profesor, vas a conseguir muchos aciertos, siempre y cuando te pongas a buscarlos realmente.

Ejemplo 1. Un alumno de primer semestre obtuvo en el primer examen parcial de Matemáticas 8.8 de calificación y en el segundo 8.6. ¿Qué calificación debe obtener en el tercer examen parcial para elevar su promedio a 9 y así poder pedir una beca?

Primero resuelve este problema usando procedimientos aritméticos.

Ahora vamos a construir la ecuación lineal en una incógnita relativa a esta situación, para resolverla razonando aritméticamente. La incógnita es **x** = "Calificación en el tercer examen parcial"; los datos conocidos son las calificaciones 8.8 y 8.6 de los dos primeros exámenes, así como el promedio de 9. Por tanto, la ecuación es

$$\frac{8.8 + 8.6 + \mathbf{x}}{3} = 9$$

¿Cuánto debe ser la suma de las tres calificaciones para que el promedio de 9? _____. Si sumamos las dos primeras calificaciones, haciendo un cálculo mental encuentra el valor de la calificación **x** para que 17.4 + **x** = 27 _______. ¿Coincide esta solución con la que obtuviste aritméticamente? _____.

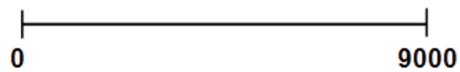
Ejemplo 2. Para terminar de amueblar su nuevo departamento, tu profesora desea comprar en una mueblería de prestigio un refrigerador nuevo que cuesta actualmente $9000. Al enterarse de esto, un compañero de trabajo le dijo que él tenía un refrigerador igual al que quería y que se lo podría vender al precio de hace un año; al preguntar cuál era el precio de hace un año el profesor le dijo que el

---

[2] Heurística: "la ayuda no algorítmica para descubrir y resolver problemas", en *Diccionario de filosofía*, Mario Bunge. Editorial Siglo XXI.

refrigerador cuesta actualmente una vez y media de lo que costaba hace un año. ¿En cuánto le saldría ese refrigerador a tu profesora? ¿De cuánto sería su ahorro?

Resuelve este problema usando procedimientos aritméticos (el segmento dibujado a continuación puede ayudarte a hallar la solución, si divides el segmento de modo que contenga el uno y medio del precio anterior).

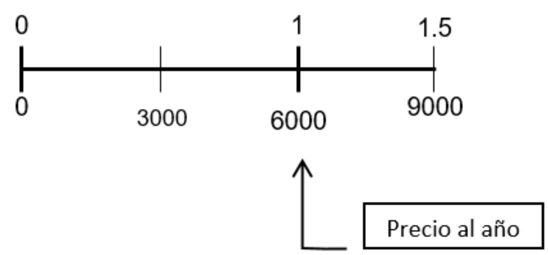


De nuevo vamos a construir la ecuación lineal en una incógnita referente a esta situación, para resolverla razonando aritméticamente. La incógnita es **x** = “Precio del refrigerador hace un año”; los datos conocidos son \$9000 y que este precio es una vez y media del valor de hace un año. Por tanto, la ecuación es

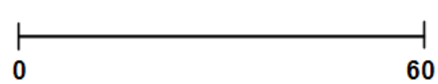
$$\frac{3}{2}\mathbf{x} = 9000$$

Si escribimos **x** = 9000, el coeficiente $\frac{3}{2}$ altera el valor de **x**, pero si multiplicamos 9000 por $\frac{2}{3}$ ese valor no se altera porque $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$; así, la solución de la ecuación es $\mathbf{x} = \frac{2}{3}(9000) = \frac{18000}{3} = 6000$.

$$\frac{9000}{3} = 3000$$



Ejemplo 3. Si ahora deseamos conocer las edades de Juan y su papá, sabiendo que la del papá de Juan es el triple de la edad de Juan y que sumadas ambas edades nos da 60, encuentra aritméticamente la solución (puedes apoyarte en el siguiente segmento).

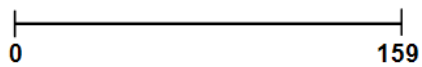


La ecuación lineal que modela este problema, construida desde la acción anterior, es

$$4\mathbf{e} = 60$$

Calcula el valor de **e** que resuelve esta ecuación y di qué edad tienen cada uno.

Ejemplo 4. El peso de Oliver Hardy es el doble del peso de Stan Laurel y la suma del peso de los dos es 159 kilogramos. ¿Cuánto pesa cada uno? (Vuelve a recurrir a un diagrama para hallar la solución aritméticamente.)



Con la ecuación lineal que construiste en la acción anterior resuelve algebraicamente este problema.

Ejemplo 5. Recordemos al ciclista que participa en tres carreras eliminatorias y debe promediar un tiempo máximo de 23 minutos para ganar el derecho de ir a la olimpiada. En la primera eliminatoria obtuvo un tiempo de 25.25 minutos; en la segunda hizo 23.75 minutos. ¿Qué tiempo debe hacer en la tercera eliminatoria para calificar justamente con los 23 minutos que como máximo se requieren?

Solución aritmética:

Solución algebraica:

Ejemplo 6. En una tienda de música un álbum de CD’s cuesta $600. Por aniversario todos sus productos están en oferta rebajados 20%, si compras el álbum, ¿de cuánto va a ser el descuento?

Solución aritmética:

Solución algebraica:

Ejemplo 7. Con la credencial del INAPAM el descuento en el pago puntual del impuesto predial anual es de 40%. Si el señor Jorge pagó en enero $820, ¿cuánto es el monto del impuesto sin descuento?

Solución aritmética:

Solución algebraica:

Ejemplo 8. En una tienda departamental, en la gran venta anual por fin de temporada unos pants tienen el 40% de descuento, además en la etiqueta está un círculo verde que significa un descuento adicional de 30% después de aplicar el descuento original. Si el cliente pagó $756 por dicha prenda, ¿de cuánto era el precio original?

Solución aritmética:

Solución algebraica:

> **AL ESTUDIANTE:** hasta aquí ha sido sencilla la forma aritmética de resolver los problemas; en los problemas subsecuentes la dificultad aumenta y el uso de las estrategias algebraicas básicas te va a mostrar su gran potencialidad gracias al adecuado empleo de las incógnitas en la formulación de sus relaciones con los demás datos, facilitándote la modelación del problema.

Ejemplo 9. Silvia tiene el doble de años de Luis, más 3. Si la edad de Silvia menos la edad de Luis da 10, ¿qué edad tiene cada uno?

Solución aritmética:

Usa la ecuación lineal que construiste en la acción anterior y resuelve este problema en forma algebraica.

Ejemplo 10. En el caso de la máquina despachadora de refrescos, recuerda que un día se recogieron 400 monedas: la cantidad de monedas de $5 duplicó a la de $10, mientras que la cantidad de monedas de $2 fue igual a la de $10 y que la cantidad de monedas de $1 cuadruplicó las monedas de $10. ¿Cuántas monedas hay de cada denominación? Primero busca la forma aritmética de resolver el problema.

Solución aritmética:

Solución algebraica:

Ejemplo 11. Resuelve el problema de la ganancia neta del agente de seguros usando cada una de las tres ecuaciones lineales en una incógnita que ya tienes para cada uno de los valores **y** = -1000, **y** = 0 y **y** = 9000.

Soluciones aritméticas:

Soluciones algebraicas:

Ejemplo12. Para una fiesta de graduación de estudiantes de bachillerato de un colegio se vendieron 405 boletos. Los boletos en preventa tuvieron un costo de $150 y el día del evento costaron $200. Si el total recaudado fue de $68,000, ¿cuántos boletos se vendieron en preventa?

Soluciones aritméticas:

Soluciones algebraicas:

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 3.3

BASES TEÓRICAS DE LA METODOLOGÍA ALGEBRAICA PARA LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

Objetivo: el alumno debe aprender los significados matemáticos de la metodología algebraica que contiene los algoritmos para que resuelva diversas modalidades de ecuaciones lineales con una incógnita. También debe generalizar la ecuación **ax + b = 0** a la función lineal interpretando la solución $x = -\frac{b}{a}$ en los registros algebraico y gráfico.

AL ESTUDIANTE: ahora vas a trabajar usando el significado teórico de ecuación lineal en una incógnita para desarrollar la metodología con la que podrás resolver ecuaciones lineales. Es muy importante que te bases en ese significado y en el de las operaciones aritméticas y algebraicas para que manejes los algoritmos usando tu memoria lógica de largo alcance.

En la acción 1 de esta unidad se te dio una definición provisional de ecuación lineal en una incógnita y se te anunció que en esta acción veríamos la definición formal, que es la siguiente:

Una ECUACIÓN LINEAL EN UNA INCÓGNITA es una ecuación algebraica que se puede reducir a una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

***en donde* a *y* b *son números reales con* a ≠ 0, en cuyo caso la solución es**

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 1. Si la numeración de las casas aumenta de dos en dos, ¿cuál es el número de las dos primeras casas si la diferencia de los cuadrados de sus números es igual a 44?

Si la incógnita es $\mathbf{x}$ = "el número de la primera casa", entonces la ecuación que resuelve el problema es $(\mathbf{x}+2)^2 - \mathbf{x}^2 = 44$.

La ecuación $(\mathbf{x}+2)^2 - \mathbf{x}^2 = 44$, ¿es una ecuación lineal en una incógnita? ______.
¿Por qué razón? ____.

Al desarrollar el paréntesis que agrupa a la potencia nos da $(\mathbf{x}+2)^2 = \mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 4$; y al sustituir en la ecuación esta expresión tenemos $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 4 - \mathbf{x}^2 = 44$. Al estar $\mathbf{x}^2$ y $-\mathbf{x}^2$, se cancelan quedando $4\mathbf{x} + 4 = 44$. Al pasar 44 al otro lado de la igualdad queda $4\mathbf{x} + 4 - 44 = 0$, o sea $4\mathbf{x} - 40 = 0$. En conclusión, $(\mathbf{x}+2)^2 - \mathbf{x}^2 = 44$ es una ecuación lineal en una incógnita puesto que la hemos reducido a la forma $\mathbf{ax} + \mathbf{b} = 0$, con $\mathbf{a} = 4$ y $\mathbf{b} = -40$. Así que la solución de esta ecuación es $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = -\frac{-40}{4} = \frac{40}{4} = 10$.

De este modo, la numeración de las dos primeras casas es 10 y 12.

Como acabamos de ver hay ecuaciones que parece que son cuadráticas debido a que se presenta el exponente 2, pero al eliminarse la incógnita con esta potencia se reducen a una ecuación lineal, o sea a la forma $\mathbf{ax + b = 0}$. También pueden darse ecuaciones con exponente 3, 4 o más que se reducen a una ecuación lineal.

El ***método*** que vamos a utilizar para resolver una ecuación lineal consiste en reducir la ecuación dada a la forma $\mathbf{ax + b = 0}$, como en el caso de la ecuación $(\mathbf{x}+2)^2 - \mathbf{x}^2 = 44$.

La ***estrategia*** para reducir una ecuación consta de las siguientes operaciones:

1. Si hay paréntesis de agrupamiento, hay que hacer las operaciones necesarias para eliminarlos.

2. Concentrar de un solo lado de la igualdad los términos con la incógnita y las constantes para dejar del otro lado de la igualdad el número cero.

3. Para conseguir esto se utilizan las siguientes propiedades de la igualdad numérica o algebraica:

   - Al sumar o restar la misma expresión a ambos lados de una igualdad ésta no se altera.
   - Al multiplicar o dividir cada lado de la ecuación por la misma expresión o un número diferente de cero, la igualdad tampoco se altera.

4. Sumando los términos que contienen a la incógnita y haciendo las operaciones con las constantes se llega a la forma $\mathbf{ax + b = 0}$.

AL ESTUDIANTE: te vamos a resolver ecuaciones lineales en diversas modalidades, comenzando por los casos más sencillos, siguiendo los pasos del método y las estrategias que te acabamos de enunciar. Los detalles operacionales de cada paso estarán a cargo de tu profesora o profesor. *Lo esencial para tu aprendizaje es que vayas entendiendo los significados lógicos de la resolución.*

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $3\mathbf{x} + 4 = 1$.

$3\mathbf{x} + 4 = 1$	ecuación original
$3\mathbf{x} + 4 - 1 = 1 - 1$	se resta 1 a cada lado de la igualdad
$3\mathbf{x} + 3 = 0$	se simplifica $a\mathbf{x} + b = 0$ con $a = 3$ y $b = 3$
$\mathbf{x} = -\frac{3}{3} = -1$	se calcula la solución

Al reducir una ecuación a su forma más simple se pueden cometer errores de tipo aritmético o algebraico, por lo que siempre es conveniente hacer una comprobación de la solución sustituyendo el valor calculado de **x** en la ecuación original:
Comprobación:

$3\mathbf{x} + 4 = 1$	ecuación original
$3(-1) + 4 = 1$	se sustituye la solución $\mathbf{x} = -1$
$-3 + 4 = 1$	se realizan las operaciones
$1 = 1$	se comprueba la solución

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $\frac{9\mathbf{x}}{5} - 6 = 21$

$\frac{9\mathbf{x}}{5} - 6 = 21$	ecuación original
$\frac{9\mathbf{x}}{5} - 6 - 21 = 21 - 21$	se resta 21 a cada lado de la igualdad
$5\left(\frac{9\mathbf{x}}{5} - 27\right) = 5(0)$	se multiplica por 5 cada lado
$\frac{45\mathbf{x}}{5} - 5(27) = 0$	se elimina el paréntesis
$9\mathbf{x} - 135 = 0$	se simplifica $a\mathbf{x} + b = 0$ con $a = 9$ y $b = -135$
$\mathbf{x} = -\frac{-135}{9} = 15$	se calcula la solución

Comprobación:

$\frac{9\mathbf{x}}{5} - 6 = 21$	ecuación original
$\frac{9(15)}{5} - 6 = 21$	se sustituye la solución **x** = 15
27 - 6 = 21	se realizan las operaciones
21 = 21	se comprueba la solución

Ejemplo 4. Resolver la ecuación $\frac{5\mathbf{x}}{7} + \frac{2\mathbf{x}}{7} = -4$

$\frac{5\mathbf{x}}{7} + \frac{2\mathbf{x}}{7} = -4$	ecuación original
$\frac{5\mathbf{x} + 2\mathbf{x}}{7} = -4$	se suman las fracciones con denominador común
$\frac{7\mathbf{x}}{7} = -4$	se suma el numerador
x = -4	se cancela el 7 y se obtiene la solución

Comprobación:

$\frac{5\mathbf{x}}{7} + \frac{2\mathbf{x}}{7} = -4$	ecuación original
$\frac{5(-4)}{7} + \frac{2(-4)}{7} = -4$	se sustituye la solución **x** = -4
$\frac{-28}{7} = -4$	se realizan las operaciones
-4 = -4	se comprueba la solución

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $\frac{2\mathbf{x} - 2}{4} - \frac{5\mathbf{x} + 1}{6} = 8$

$\frac{2\mathbf{x} - 2}{4} - \frac{5\mathbf{x} + 1}{6} = 8$	ecuación original
$\frac{3(2\mathbf{x} - 2) - 2(5\mathbf{x} + 1)}{12} = 8$	se resta con el mcm(4 , 6) = 12
6x – 6 -10x – 2 = 96	se multiplica por 12 y se simplifican paréntesis
-4x - 104 = 0	se resta 96 y se hacen operaciones
$\mathbf{x} = -\frac{-104}{-4} = -26$	se calcula la solución con a = -4 y b = -104

Comprobación

$\frac{2\mathbf{x} - 2}{4} - \frac{5\mathbf{x} + 1}{6} = 8$	ecuación original

:

$\frac{2(-26)-2}{4} - \frac{5(-26)+1}{6} = 8$	se sustituye la solución **x** = -26
$\frac{96}{12} = 8$	se realizan las operaciones
8 = 8	se comprueba la solución

Ejemplo 6. Resolver la ecuación 7**x** + 4 = 3(5**x** - 4)

7**x** + 4 = 3(5**x** - 4)	ecuación original
7**x** + 4 = 15**x** – 12	Se elimina el paréntesis de agrupación
7**x** + 4 - 15**x** + 12 = 15**x** – 12 -15**x** + 12	Se resta 15**x** y se suma 12
-8**x** + 16 = 0	Se simplifica a**x** + b = 0 con a = -8 y b = 16
$\mathbf{x} = -\frac{16}{-8} = 2$	se calcula la solución

Comprobación:

7**x** + 4 = 3(5**x** - 4)	ecuación original
7(2) + 4 = 3(5(2) - 4)	se sustituye la solución **x** = 2
14 + 4 = 3(6)	se realizan las operaciones
18 = 18	se comprueba la solución

Ejemplo 7. Resolver la ecuación -6(5**x** – 3) = 7(2 – 6**x**)

-6(5**x** – 3) = 7(2 – 6**x**)	ecuación original
-30**x** +18 = 14 – 42**x**	se elimina el paréntesis de agrupación
-30**x** +18 - 14 + 42**x** = 0	se resta 15 y se suma 42**x**
12**x** + 4 = 0	se simplifica con a = 12 y b = 4
$\mathbf{x} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$	se calcula la solución

Comprobación:

-6(5**x** – 3) = 7(2 – 6**x**)	ecuación original
$-6(5(-\frac{1}{3}) - 3) = 7(2 - 6(-\frac{1}{3}))$	se sustituye la solución **x** = $-\frac{1}{3}$
$-6(-\frac{14}{3}) = 7(4)$	se realizan las operaciones
28 = 28	se comprueba la solución

Ejemplo 8. Resolver la ecuación 4(**x** - 2) - 5(2**x** – 6) = 8(**x** + 1) – 3(2**x** + 3)

$4(\mathbf{x} - 2) - 5(2\mathbf{x} – 6) = 8(\mathbf{x} + 1) – 3(2\mathbf{x} + 3)$	ecuación original
$4\mathbf{x} – 8 – 10\mathbf{x} + 30 = 8\mathbf{x} + 8 - 6\mathbf{x} -9$	se eliminan los paréntesis de agrupación
$-6\mathbf{x} + 22 = 2\mathbf{x} -1$	se hacen operaciones
$-8\mathbf{x} + 23 = 0$	se resta 2**x** y se suma 1
$\mathbf{x} = -\frac{23}{-8} = \frac{23}{8}$	se calcula la solución con a = -8 y b = 23

Comprobación:

$4(\mathbf{x} - 2) - 5(2\mathbf{x} – 6) = 8(\mathbf{x} + 1) – 3(2\mathbf{x} + 3)$	ecuación original
$4(\frac{23}{8} - 2) - 5(2(\frac{23}{8}) – 6) = 8(\frac{23}{8} + 1) – 3(2(\frac{23}{8}) + 3)$	se sustituye la solución $\mathbf{x} = \frac{23}{8}$
$4(\frac{7}{8}) - 5(-\frac{2}{8}) = 8(\frac{31}{8}) – 3(\frac{70}{8})$	se hacen operaciones
$\frac{7}{2} + \frac{5}{4} = 31 – \frac{105}{4}$	se hacen operaciones
$\frac{19}{4} = \frac{19}{4}$	se calcula la solución con a = -8 y b = 23

Ejemplo 9. Resolver la ecuación $2\mathbf{x} - \frac{3\mathbf{x}-1}{8} = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{x}+2}{4}\right)$

$2\mathbf{x} - \frac{3\mathbf{x}-1}{8} = \frac{\cancel{2}}{3}\left(\frac{\mathbf{x}+2}{\cancel{4}}\right)$	ecuación original
$\frac{16\mathbf{x} - 3\mathbf{x} + 1}{8} = \frac{\mathbf{x}+2}{6}$	se cancela 2 y se hacen operaciones
$\frac{24(13\mathbf{x}+1)}{8} = \frac{24(\mathbf{x}+2)}{6}$	se multiplica por mcm(8 , 6) = 24
$3(13\mathbf{x}+1) = 4(\mathbf{x}+2)$	se hacen las divisiones 24/8 y 24/6
$39\mathbf{x} + 3 = 4x + 8$	se hacen operaciones para eliminar paréntesis.
$35\mathbf{x} – 5 = 0$	se resta 4**x** y 8
$\mathbf{x} = -\frac{-5}{35} = \frac{1}{7}$	se calcula la solución con a = 35 y b = -5

Comprobación:

$2\mathbf{x} - \frac{3\mathbf{x}-1}{8} = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{x}+2}{4}\right)$	ecuación original

$$2\left(\frac{1}{7}\right) - \frac{3\left(\frac{1}{7}\right) - 1}{8} = \frac{2}{3}\left(\frac{\left(\frac{1}{7}\right) + 2}{4}\right)$$ se sustituye la solución **x** = $\frac{1}{7}$

$$\frac{2}{7} - \frac{-\frac{4}{7}}{8} = \frac{\frac{15}{7}}{4}$$ se realizan las operaciones

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{15}{42}$$ se realizan operaciones

$$\frac{5}{14} = \frac{5}{14}$$ se comprueba la solución

En los ejemplos que siguen la comprobación de la solución corre por tu cuenta.

Ejemplo 10. Resolver la ecuación ($\mathbf{x}$ - 3)^2 = $\mathbf{x}^2$ - 9

$(\mathbf{x} - 3)^2 = \mathbf{x}^2 - 9$	ecuación original
$\mathbf{x}^2 - 6x + 9 = \mathbf{x}^2 - 9$	se elimina el paréntesis de agrupación
$\mathbf{x}^2 - 6x + 9 - \mathbf{x}^2 + 9 = 0$	se resta $\mathbf{x}^2$ y se suma 9
$-6\mathbf{x} + 18 = 0$	se simplifica con a = -6 y b = 18
$\mathbf{x} = -\frac{18}{-6} = 3$	se calcula la solución

Comprobación:

Ejemplo 11. Resolver la ecuación ($\mathbf{x}$ + 1)($\mathbf{x}$ – 2) = ($\mathbf{x}$ - 3)($\mathbf{x}$ + 6)

$(\mathbf{x} + 1)(\mathbf{x} - 2) = (\mathbf{x} - 3)(\mathbf{x} + 6)$	ecuación original
$\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 2 = \mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} - 18$	se eliminan los paréntesis de agrupación
$\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 2 - \mathbf{x}^2 - 3x + 18 = 0$	se hacen operaciones
$-4\mathbf{x} + 16 = 0$	se obtiene la forma reducida
$\mathbf{x} = -\frac{16}{-4} = 4$	se calcula la solución con a = -4 y b = 16

Comprobación:

Ejemplo 12. Resolver la ecuación $(\mathbf{x} - 5)(4\mathbf{x} + 4) = (2\mathbf{x} - 2)^2$

$(\mathbf{x} - 5)(4\mathbf{x} + 4) = (2\mathbf{x} - 2)^2$	ecuación original
$(\mathbf{x} - 5)(4\mathbf{x} + 4) = (2\mathbf{x} - 2)^2$	se eliminan paréntesis de agrupación
$4\mathbf{x}^2 - 16\mathbf{x} - 20 = 4\mathbf{x}^2 – 8x + 4$	se resta $4\mathbf{x}^2$ y 4, se suma 8**x**
$4\mathbf{x}^2 - 16\mathbf{x} - 20 - 4\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} – 4 = 0$	se hacen operaciones
$-8\mathbf{x} – 24 = 0$	se obtiene la forma reducida
$\mathbf{x} = -\frac{-24}{-8} = 3$	se calcula la solución con a = -8 y b = -24

Comprobación:

Ejemplo 13. Resolver la ecuación $\frac{9}{\mathbf{x}} = \frac{4}{\mathbf{x}} - \frac{3}{4}$

$\frac{9}{\mathbf{x}} = \frac{4}{\mathbf{x}} - \frac{3}{4}$	ecuación original
$4\mathbf{x}\left(\frac{9}{\mathbf{x}}\right) = 4\mathbf{x}\left(\frac{4}{\mathbf{x}} - \frac{3}{4}\right)$	se multiplica por el cm (x , 4) = 4x
$36 = 16 – 3\mathbf{x}$	se cancela **x** y 4 en el denominador y hacen operaciones
$36 - 16 + 3\mathbf{x} = 0$	se resta 16 y se suma 3**x**
$3\mathbf{x} – 20 = 0$	se simplifica la ecuación con a = 3 y b = -20
$\mathbf{x} = -\frac{-20}{3} = \frac{20}{3}$	se calcula la solución

Comprobación:

Ejemplo 14. Resolver la ecuación $\frac{3}{2\mathbf{x}} + \frac{7}{5} = \frac{4}{5\mathbf{x}} - \frac{5}{2}$

$\frac{3}{2\mathbf{x}} + \frac{7}{5} = \frac{4}{5\mathbf{x}} - \frac{5}{2}$	ecuación original
$10\mathbf{x}\left(\frac{3}{2\mathbf{x}} + \frac{7}{5}\right) = 10\mathbf{x}\left(\frac{4}{5\mathbf{x}} - \frac{5}{2}\right)$	se multiplica por 10**x** para eliminar denominadores
$15 + 14\mathbf{x} = 8 – 25\mathbf{x}$	se eliminan paréntesis y hacen operaciones
$15 + 14\mathbf{x} - 8 + 25\mathbf{x} = 0$	se resta 8 y se suma 25**x**
$39\mathbf{x} + 7 = 0$	se simplifica la ecuación con a = 39 y b = 7

$\mathbf{x} = -\frac{7}{9}$	se calcula la solución

Comprobación:

Ejemplo 15. Resolver la ecuación $\frac{3}{2\mathbf{x}^2} - \frac{1}{5\mathbf{x}} = \frac{4}{5\mathbf{x}^2} - \frac{7}{4\mathbf{x}}$

$\frac{3}{2\mathbf{x}^2} - \frac{1}{5\mathbf{x}} = \frac{4}{5\mathbf{x}^2} - \frac{7}{4\mathbf{x}}$	ecuación original
$20\mathbf{x}^2\left(\frac{3}{2\mathbf{x}^2} - \frac{1}{5\mathbf{x}}\right) = 20\mathbf{x}^2\left(\frac{4}{5\mathbf{x}^2} - \frac{7}{4\mathbf{x}}\right)$	se multiplica por $20x^2$ para eliminar denominadores
$30 - 4\mathbf{x} = 16 - 35\mathbf{x}$	se eliminan paréntesis y hacen operaciones
$30 - 4\mathbf{x} - 16 + 35\mathbf{x} = 0$	se resta 16 y se suma 35**x**
$31\mathbf{x} + 14 = 0$	se simplifica la ecuación con a = 31 y b = 14
$\mathbf{x} = -\frac{14}{31}$	se calcula la solución

Comprobación:

Ejemplo 16. Resolver la ecuación $\frac{4}{3\mathbf{x} - 2} = \frac{6}{2\mathbf{x} + 1}$

$\frac{4}{3\mathbf{x} - 2} = \frac{6}{2\mathbf{x} + 1}$	ecuación original
$\frac{4\cancel{(3\mathbf{x} - 2)}(2\mathbf{x} + 1)}{\cancel{3\mathbf{x} - 2}} = \frac{6(3\mathbf{x} - 2)\cancel{(2\mathbf{x} + 1)}}{\cancel{2\mathbf{x} + 1}}$	se multiplica por (3**x** – 2)(2**x** + 1)
$8\mathbf{x} + 4 = 18\mathbf{x} - 12$	se cancelan denominadores y hacen operaciones
$8\mathbf{x} + 4 - 18\mathbf{x} + 12 = 0$	se resta 18**x** y se suma 12
$-12\mathbf{x} + 16 = 0$	se simplifica la ecuación con a = -12 y b = 16
$\mathbf{x} = -\frac{-12}{16} = \frac{3}{4}$	se calcula la solución

Comprobación:

AL ESTUDIANTE: a continuación, se te proporciona una lista de ejercicios para que los resuelvas y compruebes la solución. Antes de empezar a resolverlos debes estar seguro de que ya dominas el método y las estrategias en los ejemplos anteriores; sobre lo que aún no entiendas, pregunta a tu profesor.

1) $\mathbf{x} - 5 = -11$ ***2)*** $4\mathbf{x} + 7 = 15$ ***3)*** $7\mathbf{x} + 2 = 9$

4) $2 - \mathbf{x} = 10 - 3x$ ***5)*** $5 - 4\mathbf{x} = 2(\mathbf{x} - 2)$ ***6)*** $6(2\mathbf{x} + 3) - 3(\mathbf{x} + 6) = 0$

7) $0.3(3 + 2\mathbf{x}) + 1.2\mathbf{x} = 4.5$ ***8)*** $1.5\mathbf{x} - 1.9 = 0.4(1.6 - 2\mathbf{x})$ ***9)*** $\frac{1}{5}\mathbf{x} + 2 = 3 - \frac{2}{5}\mathbf{x}$

10) $\frac{5}{3}\mathbf{x} - 1 = 4 + \frac{2}{3}\mathbf{x}$ ***11)*** $\frac{5 + 3\mathbf{x}}{5} = \frac{7 - \mathbf{x}}{7}$ ***12)*** $(2\mathbf{x} + 9)(4\mathbf{x} - 3) = 8\mathbf{x}^2 - 12$

13) $(\mathbf{x} - 2)^2 = (\mathbf{x} - 5)(\mathbf{x} + 4)$ ***14)*** $(2\mathbf{x} - 3)^2 = (1 - 2\mathbf{x})^2$ ***15)*** $\frac{2}{\mathbf{x}} - \frac{3}{2\mathbf{x}} + \frac{4}{3\mathbf{x}} = 5$

16) $\frac{4}{\mathbf{x}^2} - \frac{3}{2\mathbf{x}} = \frac{4}{\mathbf{x}} - \frac{7}{2\mathbf{x}^2}$ ***17)*** $\frac{3 + 2\mathbf{x}}{4\mathbf{x} + 2} = \frac{3}{4}$ ***18)*** $\frac{\mathbf{x} - 1}{\mathbf{x} + 1} = \frac{2\mathbf{x} - 3}{2\mathbf{x} + 3}$

UN PROBLEMA DE TELEPATÍA

Un mago anuncia que va a hacer con Rocío un acto de telepatía. Para ello le pide que piense un número, que lo escriba en una tarjeta y la esconda, tras de lo cual le va diciendo a ella: “al número de la tarjeta súmale 8, multiplica el resultado por 5 y réstale 4 al producto, luego resta el número que pensaste, multiplica el resultado por 2 y después resta 3”. Al fin, Rocío dice que el resultado de todas las operaciones es 125 y el mago dice acertadamente qué número está en la tarjeta. ¿Cuál fue ese número?

Construye la ecuación lineal y resuelve este problema.

¿El mago realmente hizo un acto de telepatía? _____, ¿cuál es el secreto del mago para acertar siempre en este acto en forma instantánea? _____________________ ____.

Ahora escoge un compañero(a) y haz un ejercicio “telepático” similar al anterior, actuando tú mismo como mago, pero cambiando las operaciones que hizo el mago; luego invierte la situación y que sea tu pareja quien haga el papel de mago. La ecuación con su solución que cada uno de ustedes hizo para el acto “telepático”, escríbanla y entréguenla al profesor.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

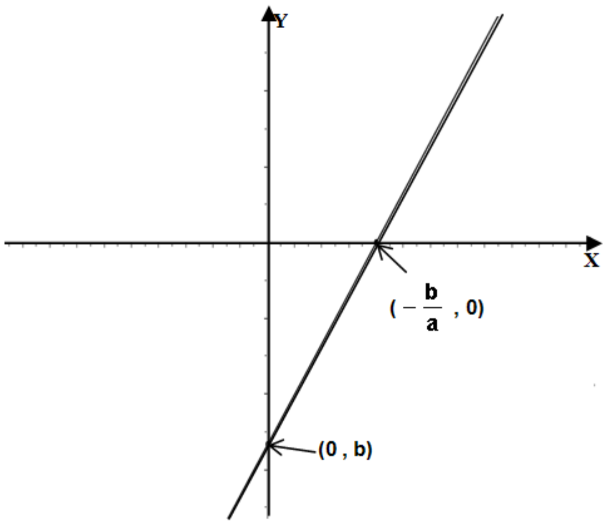
Al reducir cualquier ecuación lineal en una incógnita a su forma más simple **ax** + **b** = 0, podemos dar cualquier otro valor diferente de cero en el lado derecho de la igualdad. Ahora bien, si abstraemos esa forma de la ecuación **ax** + **b** = 0 mediante la inclusión de una variable **y** nos queda **ax** + **b** = **y**. Trasponiendo los términos de la igualdad y escribiendo **y** = **f(x),** nos queda **f(x)** = **ax** + **b**, que corresponde a una función lineal, como se vio en la unidad pasada.

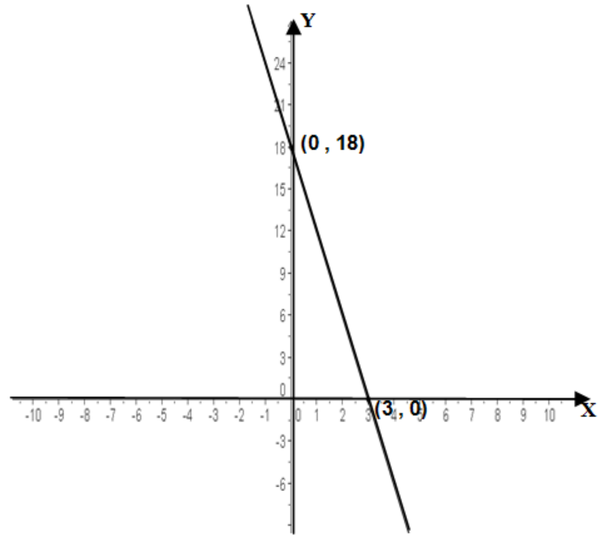
Su gráfica es una línea recta que corta al eje **Y** de las ordenadas en el valor de **b**. ¿Qué punto de la gráfica de la función **f(x)** = **ax** + **b** corta al eje **X** de las abscisas?

El eje **X** se caracteriza por tener todos sus puntos con ordenada igual a cero, es decir, cualquier punto del eje de las abscisas **X** es de la forma (**x** , 0). Así, si **y** = f(**x**) = 0 entonces la función lineal se transforma en la ecuación lineal con una incógnita **ax + b = 0** cuya solución $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ es la abscisa donde la gráfica de f(**x**) = **ax** + **b** corta al eje **X**. En otras palabras, es el punto $(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}, 0)$ en donde la gráfica de la función f(**x**) = **ax** + **b** corta al eje **X**, como se aprecia en la gráfica 1

Un caso concreto es la ecuación $(\mathbf{x} - 3)^2 = \mathbf{x}^2 - 9$ del ejemplo 10, con solución **x** = 3, ecuación que es lineal en una incógnita porque se le simplificó a -6**x** + 18 = 0, la cual se generaliza en la función lineal f(**x**) = -6**x** + 18 con **a** = -6 y **b** = 18, cuya gráfica es la línea recta que corta al eje **Y** en 18 (como se vio en la unidad anterior) y al eje **X** en $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = -\frac{18}{-6} = 3$ (ver gráfica 2).

Gráfica 1 **Gráfica 2**





En síntesis, salvo el caso de una ecuación lineal en una incógnita con expresiones algebraicas racionales en las que el denominador contiene a la incógnita **x**, ***cualquier ecuación lineal en una incógnita se generaliza a una función lineal*** **f(x) = ax + b**. cuya gráfica pasa por los ejes coordenados en los puntos $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ para el eje **X** y para el eje **Y** en el punto **(0 , b)**

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 3.4

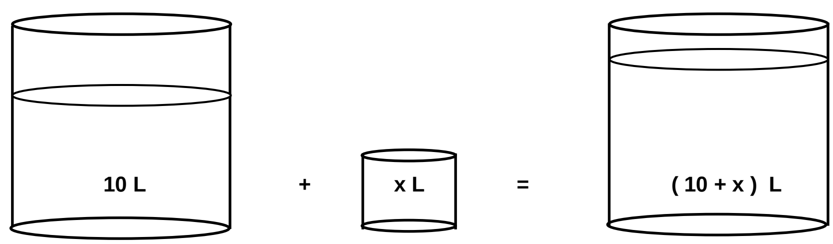
APLICACIONES DE LA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

Objetivo: el alumno debe aprender a usar todo lo que ha visto a lo largo de esta actividad para aplicarlo en la resolución de problemas con un alto grado de dificultad.

> **AL ESTUDIANTE:** ahora vas a desarrollar tu pensamiento lógico, apoyándote en las estrategias que has venido aplicando, con problemas que exigen un mayor uso de las abstracciones matemáticas para construir los razonamientos adecuados.

Problema 1. Un antibiótico en ampolleta contiene el 40% de la sustancia activa pero el laboratorio que lo fabrica acaba de descubrir que el virus que combate se ha hecho resistente y que una concentración del 70% de la misma sustancia elimina al virus. En cada recipiente donde se fabrica la medicina hay 10 litros de mezcla. ¿Qué cantidad de sustancia activa se debe agregar a cada recipiente para que quede al 70% de concentración?

Solución. La incógnita **x** es "cantidad de sustancia activa que se debe agregar a la mezcla para que quede al 70% de concentración".



0.4(10) = 4 litro de sustancia activa + x litros de sustancia activa = 0.7(10 + x) litros de sustancia activa

En cada recipiente originalmente hay 0.4(10) = 4 litros de sustancia activa.

Después de agregar la sustancia activa hay en cada recipiente 4 + **x** litros de sustancia activa al 70% de concentración.

La mezcla en cada recipiente es de 10 + **x** litros al 70% de concentración, de los cuales 0.7(10 + **x**) litros son de sustancia activa.

La ecuación lineal es, por tanto 4 + **x** = 0.7(10 + **x**)

Utiliza este modelo matemático para resolver el problema.

Problema 2. En una fábrica automotriz descubrieron que el anticongelante mezclado con el agua tiene una concentración del 60% en los radiadores de 5 litros de un nuevo modelo que está por salir al mercado, pero en las especificaciones se establece que esa concentración debe ser del 90%. ¿Qué cantidad de mezcla debe sacarse a cada radiador y reemplazarse por anticongelante puro para que la concentración quede al 90%?

Solución. La incógnita **x** es "cantidad de mezcla que debe ser extraída para que el anticongelante que la reemplace alcance 90% de concentración".

En cada radiador se tendrá 5 – **x** litros de la mezcla con el 60% de anticongelante, es decir la cantidad de anticongelante en el radiador será 0.6(5 – **x**).

Al reemplazar el anticongelante puro se tendrá en el radiador 0.6(5 – **x**) + **x** litros de anticongelante.

El radiador quedará lleno con el 90% de anticongelante, es decir debe haber 0.9(5) litros de anticongelante.

La ecuación lineal se obtiene con la igualdad de las dos expresiones anteriores (litros de anticongelante en el radiador), por tanto 0.6(5 – **x**) + **x** = 0.9(5).

Utiliza este modelo matemático para resolver el problema.

Problema 3. Un tráiler sale a las 6 de la mañana de la zona de carga de una fábrica en la ciudad de México hacia la ciudad de Monterrey cargado con 80 toneladas, peso que obliga a que su velocidad promedio deba ser de 60 km/hr. Otro tráiler con capacidad para 60 toneladas sale del mismo lugar hacia el mismo destino dos horas más tarde después de haberlo cargado y debido a la carga que lleva su velocidad promedio debe ser de 75 km/hr. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo tráiler en alcanzar al primero?, y ¿a qué hora del día lo alcanzará?

Para traducir esta situación al lenguaje algebraico tienes que entender muy bien el contenido del problema. Verifica que sí lo has comprendido siguiendo la estrategia y di cuál es la incógnita ____ y asígnale la letra **x**. ¿A qué hora del día se empieza a cronometrar el tiempo **x**? ________

¿Qué distancia ha recorrido el segundo tráiler en el tiempo **x**? _______

¿Qué distancia ha recorrido el primer tráiler en el mismo tiempo **x**? _______

¿Qué relación hay entre las dos expresiones anteriores? _____________________

¿Cuál es el modelo matemático para resolver este problema? ________________

Solución.

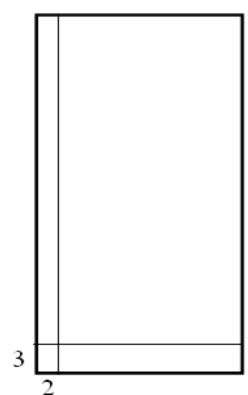
Problema 4. Por una urgencia una persona que necesita $40,000 acude a una casa de préstamos que le ofrece dos opciones: la opción A presta al 15% de interés para pagar en un plazo de dos meses y la opción B presta al 25% de interés para pagar en un plazo de cuatro meses. Esta persona sabe que, aparte de lo anterior, va a disponer de $47,000 pero también sabe que no contará con todo este dinero en un plazo de dos meses, así que investiga cuánto debe pedir en el plan A para saldar con seguridad su deuda en el plan A. Con eso va a saber cuánto deberá pagar en el plan B después. ¿Cuánto debe pedir y cuánto tendrá que pagar en el plan A? ¿Y cuánto debe pagar en el plan B?

Solución. En este caso la incógnita **x** es “la cantidad de dinero que debe pedir en el plan A”, entonces 1.15**x** es la cantidad que tendrá que pagar en un plazo de dos meses y después deberá pagar 1.25(40000 – **x**). Sabemos que va a contar con $47,000 para pagar por lo que la ecuación que modela este problema es

$$1.15\mathbf{x} + 1.25(40000 - \mathbf{x}) = 47000$$

Por tanto, esa persona deberá pedir ________ miles de pesos en el plan A y deberá pagar ___________ con todo e intereses en el mismo plan. En el plan B en total cuánto debe pagar __________.

Problema 5. A un jardín público de forma rectangular con el largo igual al doble del ancho, por ampliación de calle se le redujeron 2 metros en el largo y 3 metros en el ancho por ampliación de una avenida. El área que se quitó al jardín es de 162 m^2, ¿cuáles eran las dimensiones originales del jardín?



Solución. Un dibujo te será de gran ayuda para la construcción del modelo matemático.

Selecciona la incógnita **x** de este problema ____________________

Con los datos del problema construye la ecuación lineal y resuélvelo.

Problema 6. En el inciso *j* del problemario de la acción 3 de la actividad 2 en la unidad I se resolvió por el método aritmético este problema: dos costureras producen vestidos, la obrera A tarda 4 horas en terminar un vestido y la B lo hace en 6 horas. Si llega una clienta y le urge un vestido ¿cuánto tiempo tardarán las dos en fabricarlo conjuntamente?

Ahora vamos a resolverlo algebraicamente, pero te recomendamos que primero vayas a la unidad I y estudies detenidamente la solución aritmética.

Solución. Claramente la incógnita **x** es "tiempo en que las dos costureras juntas hacen un vestido". Con los datos obtenemos que en una hora la obrera A hace $\frac{1}{4}$ de vestido y la obrera B hace $\frac{1}{6}$ de vestido, por lo que juntas en una hora hacen $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ de vestido. Pero en relación con la incógnita también en una hora hacen $\frac{1}{\mathbf{x}}$ de vestido. Como $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{\mathbf{x}}$ significan lo mismo, resulta que el modelo matemático es

$$\frac{5}{12}=\frac{1}{\mathbf{x}}$$

cuya solución es $\mathbf{x}=\frac{12}{5}$. Así, para hacer el vestido juntas tardan 2 horas con 24 minutos.

Los problemas que siguen los tienes que resolver con base en lo que ya has aprendido y apoyándote en lo que acabas de ver en los problemas anteriores.

Problema 7. Una tienda agropecuaria vende fertilizante líquido con la concentración de nitrógeno según las necesidades del suelo o los recursos económicos del comprador. La tienda tiene el producto en dos mezclas, una al 5% que es la mínima cantidad que debe aplicarse y la otra al 15% que es la máxima que se le puede agregar al suelo.

a) Si un cliente solicita 10 litros al 9%, ¿cuántos litros de cada mezcla deben ponerle al envase?

Solución.

b) Si piden 20 litros al 12%, ¿cuántos litros de cada solución deben envasar?

Solución.

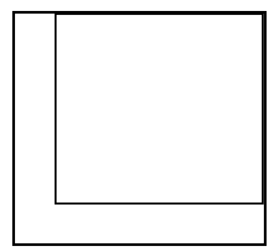
Problema 8. Un matrimonio que se retrasó no alcanzó el autobús que iba a llevarlos; tuvieron que alquilar un automóvil para alcanzar el autobús, aunque tardaron 45 minutos en salir para alcanzarlo. ¿Cuánto tiempo tardarán en alcanzarlo si el camión va a 80 km/hr y el automóvil a 120 km/hr?

Solución.

Problema 9. Un tráiler que en la parte trasera dice "Precaución doble de largo" mide 35 metros de largo y lleva una velocidad de 90 km/hr, es alcanzado en un tramo recto de carretera por un automóvil de 5 metros de largo cuya velocidad es de 108 km/hr ¿cuántos segundos tardará el auto en rebasar totalmente al tráiler? ¿Cuántos metros ocupará el auto en rebasar totalmente al tráiler?

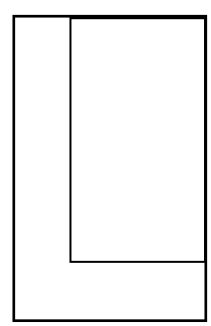
Solución. (Sugerencia: convierte las velocidades en m/seg)

Problema 10. A un terreno de forma cuadrada le donaron 4 metros a cada lado para la construcción de una escuela y el terreno aumentó su área en 160m^2 ¿Cuáles eran las dimensiones originales del terreno?



Solución.

Problema 11. Si el terreno del problema anterior es de forma rectangular con el largo igual al doble del ancho menos 4 metros y al donarle 8 metros a cada lado del terreno, éste aumentó su área en 416m^2 ¿Qué dimensiones tenía originalmente el terreno?



Solución.

Problema 12. Un señor pone de tarea a sus dos hijos podar el césped del jardín de su casa cada 15 días en forma alternada; Luis lo hace en 2 horas mientras que Javier tarda 3 horas en hacer la tarea. Un domingo, fin de mes, para ir a un concierto cortaron el césped entre los dos con una podadora cada quién ¿En cuánto tiempo lo hicieron?

Solución.

Problema 13. Una bomba de agua llena una alberca en 10 horas y cuando conectaron otra bomba la alberca se llenó en 4 horas ¿Cuánto tiempo le llevará a la segunda bomba llenar la alberca sin trabajar la primera?

Solución.

Problema 14. En una fábrica de leche el contenedor que surte de líquido al proceso de envasamiento estando lleno se vacía en 12 horas. Un conducto llena el contenedor en 4 horas y otro conducto lo hace en 6 horas estando vacío y sin que funcione el conducto de desagüe. Si en un día se inicia el envasamiento con los tres conductos abiertos estando el contenedor vacío, ¿cuánto tiempo tardará el contenedor en llenarse?

Solución.

El problema con que cerramos esta unidad tiene un gran interés histórico además del valor matemático.

Problema 15. **Diofanto de Alejandría** (nacido alrededor del 200/214 - fallecido alrededor de 284/298) fue un antiguo matemático griego. Se considera a Diofanto el padre del álgebra.

La única inscripción que hay en la lápida de la tumba de Diofanto es una dedicatoria compuesta en forma de ejercicio matemático. Aquí la reproducimos en el lenguaje común para que tú lo traduzcas al lenguaje algebraico:

Lenguaje común inscrito en la tumba	**Lenguaje del álgebra**
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida,	
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	
Había transcurrido después una duodécima parte de su vida cuando de vello se cubrió su barbilla.	
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril,	
pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	

quien entregó su cuerpo a la tierra, su hermosa existencia que duró tan sólo la mitad de la de su padre.	
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo	

¿Cuántos años vivió Diofanto? ___________________ ¿A qué edad se casó? ________

¿Cuántos años tenía él cuando nació su primer hijo? ________ ¿Qué edad tenía cuando murió su hijo? _________ ¿Cuántos años vivió su hijo? __________